

Problème : Décomposition polaire

Notation et définitions :

Dans tout le problème, n désigne un entier non nul.

- Une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie positive) si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXAX \geq 0$ (resp. pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ${}^tXAX > 0$).

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

- On muni $M_n(\mathbb{R})$ de la norme défini par, pour tout $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$

$$\|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} (|m_{ij}|).$$

- On muni $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On dit qu'un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (resp. si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ $\langle u(x), x \rangle > 0$).

Partie I

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique. Montrer que u défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. a) Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- × 3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique défini positif. On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v^2 = u$.
a) $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique et vérifiant $v^2 = u$.
Soit λ une valeur propre de u . Montrer que v induit un endomorphisme de $\ker(u - \lambda Id)$ que l'on notera $\tilde{v}_\lambda$.
b) Montrer que $Sp_{\mathbb{R}}(\tilde{v}_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$ puis déduire que $\tilde{v}_\lambda = \sqrt{\lambda} I_{\ker(u - \lambda Id)}$.
c) En déduire l'expression de v .
- ✓ 4. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficient réels tel que $v = Q(u)$.
(Ind : Utiliser les polynômes de lagrange en les valeurs propres de u deux à deux distincts).

Partie II

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- × b) En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

c) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compact de $M_n(\mathbb{R})$.
- × 3. Montrer $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
- × 5. Dédurre que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors il existe un couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique?
- × 6. On considère l'application φ de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$.
Montrer que φ est continue et bijective.

Partie III "Applications"

× Application 1.

Dans cette application A et B désignent deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe une matrice $U \in M_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tU\bar{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\bar{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U .

1. Justifier que ${}^tA = U^tBU^{-1}$.
2. On pose X et Y les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $U = X + iY$.
 - a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in GL_n(\mathbb{R})$.
 - b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.
 - c) Dédurre qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$.
3. On écrit P sous la forme $P = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis $BS = SB$.
 - b) En déduire qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = OB^tO$.

Application 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$ du système :

$$(S) \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = O_n \end{cases}$$

1. Montrer que si le système (S) admet une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
2. On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
3. Justifier qu'on peut chercher les solutions de X sous la forme $X = UH$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer H .
5. Montrer l'existence d'une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$ de (S) .

Partie IV Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \text{tr}(AM)$.

Dans la suite A désigne la matrice définie dans cette question.

2. Justifier l'existence de $\alpha_n = \sup\{f(O), O \in O_n(\mathbb{R})\}$.

3. Justifier que la matrice A admet n valeurs propres positives, $\mu_1, \dots, \mu_n$ comptées avec leurs ordres de multiplicités.

4. Montrer que $\alpha_n = \sup\{\text{tr}(D\Omega), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$ où $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})$.

5. En déduire que $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.

6. Dans cette question f désigne la forme linéaire définie par $f(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}$. Déterminer la matrice A telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \text{tr}(AM)$.

7. Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$