

Problèmes : Polynômes orthogonaux

Problème 1 : Polynôme de Laguerre

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout couple $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note : $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

1) Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définit un produit scalaire.

2) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. vérifier que : $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$.

Conclure que $\langle X^k | 1 \rangle = k!$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = XP'' + (1 - X)P'$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Écrire la matrice de φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

3) En déduire que φ est diagonalisable et que $\text{Sp}(\varphi) = \{-k, k \in \{0, \dots, n\}\}$.

4) On fixe un entier $k \in \{0, \dots, n\}$.

a) Vérifier qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\varphi(P_k) = -kP_k$.

b) Justifier que P_k est de degré k .

5) Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

6) Montrer que φ est un endomorphisme symétrique.

$((\varphi(P) | Q) = (P | \varphi(Q)))$.

7) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss.

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles deux à deux distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) \cdot (*)$.

1) Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{bmatrix}.$$

2) En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

3) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Problème 2 : Polynôme d'Hermite

On admet dans ce problème que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(2k)!}{k!2^k} \sqrt{2\pi}$$

Partie I

Soit $E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tel que } x \mapsto f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}$.

1) a) Montrer que si f et g sont deux fonctions de E , alors la fonction

$x \mapsto f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2) Soit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E

3) Soit $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 0\}$.

a) Montrer que F est un hyperplan de E et donner un supplémentaire.

b) Soit $f \in F^\perp$. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} f(x)$.

i) Vérifier que $g \in F$.

ii) En déduire que $F^\perp = \{0_E\}$.

iii) La décomposition $E = F \oplus F^\perp$ est-elle valable ?

c) Soit ψ la forme linéaire sur E définie par : $\psi(f) = f(0)$

i) Montrer qu'il n'existe aucune fonction $g \in E$ telle que $\psi(f) = \langle f, g \rangle$ $\forall f \in E$.

(On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n(x) = e^{-nx^2})_{n \in \mathbb{N}}$)

ii) Trouver le polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\psi(P) = \langle P, Q \rangle \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

Partie II

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x) \quad \text{et} \quad P_{n+1}(X) = P'_n(X) - XP_n(X).$$

b) Donner P_0, P_1, P_2 et P_3 .

c) En déduire que P_n est de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$ et de même parité que n .

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n vérifie l'équation différentielle

$$y'' - xy' + ny = 0 \quad (E_n)$$

(Ind : On pourra calculer $h^{(n+2)}$ de deux manières).

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = -nP_{n-1}$

Pour la suite on note $H_n = (-1)^n P_n$.

3) Soit $N \geq 2$ un entier naturel. On considère l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^N)$ et on pose

$$\varphi : \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}_N[X]$$

$$P \longmapsto \varphi(P) = P'' - XP'$$

a) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$

b) Ecrire la matrice de φ dans B .

c) Montrer que φ est diagonalisable.

d) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$

(Ind : On pourra remarquer que $\varphi(P)(x) = (P'(x)e^{-\frac{x^2}{2}})'e^{\frac{x^2}{2}}$)

e) En déduire que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_N)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.

4) a) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|H_k\|^2 = k\|H_{k-1}\|^2$

b) En déduire la valeur de $\|H_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$.

5) a) Montrer que

$$H_{N+1} = X^{N+1} - \sum_{k=0}^N \frac{\langle X^{N+1}, H_k \rangle}{k!} H_k$$

b) Trouver le polynôme P de $\mathbb{R}_N[X]$ Pour lequel

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^{N+1} - P(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

est minimale, puis donner la valeur de ce minimum.

Nedra Moalla

Problème 3 : Polynôme de Legendre

Partie I - Quelques résultats généraux.

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

1. Déterminer L_0 , L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n .
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n'(X) = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)}(X) = \mu(X - 1)^{n-k}(X + 1)^{n-k}(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $[-1, 1]$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)}(X) = \nu(X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{n-k-1}(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_{k+1}).$$

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$, en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n$.

Partie II : Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ .

1. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans la suite n désigne un entier naturel.

2. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ .

3. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, m_{k,k} = k(k+1).$$

4. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.

5. Vérifier que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0.$$

6. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que

$$(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0.$$

7. En déduire que, pour tout $k \in [0, n]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n , en précisant sa valeur propre associée.

8. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ .

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On note $\| \cdot \|$ la norme associée.
2.   tablir que : ϕ est un endomorphisme symétrique
3. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, L_n \rangle = 0.$$

Problème 3 : Polynôme de Tchebychev

Étant donné un entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n .

Dans tout le problème on identifie le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et sa

fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n , on appelle c_n la fonction définie pour $x \in [-1, 1]$ par : $c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

Partie 1

- Vérifier que pour tout entier naturel n , la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.
- On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $T_0 = 1, T_1 = X$, et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.
- Prouver que, pour tout entier naturel n , la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie 2

- Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose : $(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
(a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Dans toute la suite du problème $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

- Soient p et q dans $\mathbb{N}$, on pose : $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$.

Démontrer que, si $p \neq q$, alors $I_{p,q} = 0$.

Calculer $I_{p,p}$.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ définie dans la partie 1 est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette base est-elle orthonormale ?
- Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (T_n, T_n) = \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des réels, et P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

- Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que l'on a : $P = \sum_{k=0}^n b_k T_k$.

- Calculer b_n .

- Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geq \frac{\pi}{2} b_n^2$.

- En déduire la valeur de : $\inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^1 \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Partie 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose : $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

- Vérifier que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie 1 et qu'ils sont deux à deux distincts.
- Soit $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

qui, pour tous i et j dans $\{1, n\}$, vérifient : $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Montrer que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(b) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(x_i), \text{ avec}$$

$$\lambda_j = \int_{-1}^1 \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$