

Problème : Projection orthogonale

Notation et définitions :

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces euclidiens de dimensions au moins égale à 2.

Partie I

1. Soit p un projecteur de E .
Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.
2. dans l'espace $(E, \langle, \rangle)$, on considère $B = (e_1, \dots, e_n)$ une B.O.N.
Montrer que pour tout x et y dans E , on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY$ avec X et Y sont les matrices respectivement des vecteurs x et y dans la base B .
3. Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leq \dim(H) < \dim(F)$.
Soit $B' = (e_1, \dots, e_k)$ une B.O.N. de H et p la projection orthogonale de F sur H .
a) Pour $z \in F$ donner, sans justification, l'expression de $p(z)$ dans la base B' .
b) Montrer que pour tout $z \in F$, $\|p(z)\| \leq \|z\|$.
4. On considère M la matrice suivante :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique usuel d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.
b) Donner une base orthonormale de $\ker(p)$ et une base orthonormale de $\text{Im}(p)$.
6. Soit K un second sous-espace vectoriel de F , r la projection orthogonale de F sur K , λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.
a) Montrer que $u \in H$ et que $r(u) = \lambda u \in H^\perp$.
b) Montrer que $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.
c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.
7. On suppose dans cette question que p et r commuent.
a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.
b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.
c) Montrer que $\ker(p \circ r) = \ker p + \ker r$ et $\text{Im}(p \circ r) = \text{Im} p \cap \text{Im} r$.

8. On pose $m = \dim(F)$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices par blocs suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k , A une matrice carré d'ordre k et D une matrice $m - k$.

- a) Montrer que les matrices A, B, C et D vérifient les relations suivantes :

$$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D, \quad {}^tA = A, \quad {}^tB = C, \quad (D \neq D)$$

- b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le spectre de p ou r est inclus dans $\{0, 1\}$

ii) ${}^tCC = 0$

iii) $C = 0$

iv) p et r commutent.

II Dans cette partie, on se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et un élément $v \in F$

En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f , montrer qu'il existe élément $x_0 \in E$ tel que

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

Dans la suite x_0 sera appelé une pseudo-solution de l'équation

$$f(x) = v \quad (*)$$

2. Montrer que si f est injective, alors l'équation $(*)$ admet une pseudo-solution unique.

3. Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si pour tout $x \in E$, on a : $\langle f(x), f(x_0) - v \rangle = 0$

4. Soit B et B' deux bases orthonormales de E et F respectivement. On note la matrice $A = \text{Mat}(f, B, B')$, les vecteur $V = \text{Mat}(v, B')$ et $X_0 = \text{Mat}(x_0, B)$.

a) Ecrire sous forme matricielle l'équation $\langle f(x), f(x_0) - v \rangle = 0$.

b) En déduire que x_0 est pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si

$${}^tAAX_0 = {}^tAV.$$

5. Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et de v sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.