

Problème 2

Matrice Symétrique

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- On note $(M_{n,1}(\mathbb{R}) < ; >)$ l'espace euclidien des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini par $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme euclidienne associée sera notée $\| \cdot \|$.

- $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices **symétriques** de $M_n(\mathbb{R})$.
- Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive si elle vérifie

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S X \geq 0.$$

L'ensemble des matrices positives sera notées $S_n^+(\mathbb{R})$.

- Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si elle vérifie

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X S X > 0.$$

L'ensemble des matrices définies positives sera notées $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie I

Soit $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

- Vérifier les égalités suivantes
 - ${}^t X Y = {}^t Y X$
 - ${}^t X S Y = \langle X, S Y \rangle = \langle S X, Y \rangle$.

2. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- Justifier que si $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors S est semblable à une matrice diagonale avec P est une matrice orthogonale.
- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X S X = 0$. Montrer que toute valeurs propre de S est nulle, puis déduire que S est la matrice nulle.

4. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

5. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- S est définie positive.
- Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.
- Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $S = {}^t M M$.
- S est positive et inversible.

6. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$. On note $T = \sqrt{S}$.
- Justifier qu'il existe $B = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs propres de S .
- On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ les valeurs propres de S deux à deux distincts.

On considère les polynômes d'interpolations de Lagrange en

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ définis par :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}.$$

i) Soit $i \in \{1, \dots, p\}$, calculer $L_i(S)V_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$.
(On distinguera les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$).

ii) Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $P(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}, 1 \leq i \leq p$. Calculer $P(S)V_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$.
En déduire $P(S) = \sqrt{S}$ (Ind. Exprimer P à l'aide de $L_1, L_2, \dots, L_p$).

d) On considère $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que $S_n^+(\mathbb{R})$ et déterminer $\sqrt{S}$.

Partie II

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'application R_A (appelée quotient de Rayleigh) pour la matrice A par :

$$R_A : M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2}.$$

On suppose désormais que A est une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec leurs ordres de multiplicités telles

que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $B = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs propres de A tels que $AV_i = \lambda_i V_i$.

1. Montrer que pour tout $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$ élément de $M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$R_A(X) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

2. Dédurre que $\lambda_1 \leq R_A(X) \leq \lambda_n, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

3. Calculer $R_A(V_i)$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

4. Dédurre que $\min_{X \neq 0} R_A(X) = \lambda_1$ et $\max_{X \neq 0} R_A(X) = \lambda_n$.

5. Montrer que R_A est continue sur $M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

6. Soit $F = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}); \langle AX, X \rangle = \|X\|^2\}$.

Montrer que F est un fermé.