

Problème Algèbre

Isométrie vectorielle

Partie I.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

On rappelle qu'un endomorphisme u de E est orthogonale (ou isométrie vectorielle) si $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux (des isométries).

Partie I

1. Montrer que $(O(E), o)$ est un groupe compact.
2. Montrer que $u \in O(E)$ si et seulement si $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E$.
3. Soit F un sous espace vectoriel de E et S_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Montrer que $S_F \in O(E)$.
4. Soit u un endomorphisme de E . Montrer que u est un endomorphisme symétrique et orthogonal si et seulement si u est une symétrie orthogonale.
5. Soit $u \in O(E)$, montrer que $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
6. Montrer si u admet une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.
7. Montrer si 1 et -1 sont des valeurs propres de u , alors les sous espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.
8. Soit $u \in O(E)$ et F un sous espace vectoriel de E .
Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u .

Partie II.

1. On pose $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

On note $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det A = 1\}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Montrer $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$, alors il existe D une droite vectorielle stable par u .

b) On suppose $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$ et que $\chi_u(X) = P_1 \dots P_r$ avec $\deg P_k = 2, \forall 1 \leq k \leq r$.

Posons $P_1(X) = X^2 + aX + b$ avec $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Soit $x \in \ker P_1(u) \setminus \{0\}$. On pose $F = \text{vect}(x, u(x))$. Montrer que F est stable par u et que $\dim F = 2$.

On considère dans la suite u un endomorphisme orthogonal.

3. Justifier que si F est un sous espace vectoriel stable par u , alors u_F , l'endomorphisme induit par u sur F est orthogonale.

on considère dans la suite $u \in O_n(\mathbb{R})$

4. a) Montrer par récurrence sur la dimension de E qu'il existe, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ éléments de $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et une B.O.N de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, sous la forme

$$M(u, B) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & R_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \quad (*)$$

- b) Dédurre que pour une matrice $O \in O_n(\mathbb{R})$, il existe p, q et k des entiers naturels $p + q + 2k = n$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ éléments de $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, tels que

$$O = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & R_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & R_{\theta_k} \end{pmatrix} P^{-1}$$

5. On suppose dans cette question que $\dim E = 3$, f un endomorphisme de E avec $f \neq id_E$, $B = (V_1, V_2, V_3)$

une B.O.N de E telle que $M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- a) Soit $D = \ker(f - id_E)$ montrer que $\dim(D) = 1$.
b) Soit $W \notin D$, montrer que $\det(V_1, W, f(W))$ a le même signe que $\sin \theta$.

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que la matrice de f dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une rotation de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

Partie III "Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n \geq 3$.

Soit $n \geq 3$, on note $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det A = 1\}$.

1. En utilisant la notation de la question II 4.b), montrer que $O \in SO_n(\mathbb{R})$ si et seulement si q est paire.
2. Dédurre que $O \in SO_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe p et r des entiers naturels $p + 2r = n$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ éléments de $]0, 2\pi[$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, tels que

$$O = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & R_{\theta_1} & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & R_{\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. a) Soit $O \in SO_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un chemin contenu dans $SO_n(\mathbb{R})$ reliant I_n et O .
b) Dédurre que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $H = \{^t U A U, U \in SO_n(\mathbb{R})\}$.

Montrer que H est connexe par arcs.