

## Devoir à la maison préhilbertien

### Problème 1 "D'après concours MP 2021"

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $Sp(A)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$  et  $\rho(A)$  rayon spectral de  $A$ , le réel défini par :  $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$ .

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est identifié à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée :

Pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{et} \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

•  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); {}^tXAX \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n\}$ , où  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ . Dans toute la suite, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Partie I

1. (a) Donner  $\rho(\lambda I_n + N)$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente.
- (b) Montrer que :
  - (i) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ .
  - (ii) Pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|AX\|_2 \leq \|A\|_2 \|X\|_2$ , puis déduire que  $\rho(A) \leq \|A\|_2$ .
- (c) Soit  $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  et  $M = \text{diag}(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels non nuls.  
Montrer que  $\rho(M) = \max(\rho(A_1), \rho(A_2))$ .

#### 2. Décomposition de Schur

On se propose de montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire supérieure. Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure.

- (a) Justifier que,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$  est stable par  $f$ .
- (b) Soit  $B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  la base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ , obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base  $B$ .  
Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $B'$  est triangulaire supérieure.

(c) En déduire la décomposition de Schur :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}); A = {}^t P T P,$$

où  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire supérieure.

## Partie II

On dit que la matrice  $A$  est **radiale** si  $\|A\|_2 = \rho(A)$ .

1. Donner un exemple d'une matrice radiale.

2. Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . La matrice  $M$  est-elle radiale ?

### 3. Première caractérisation

- (a) Vérifier que  $A$  est radiale si, et seulement si,  $\rho(A) \geq \|A\|_2$ .
- (b) En déduire que si  $A$  est radiale alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la matrice  $A^k$  est aussi radiale.
- (c) Montrer que  $A$  est radiale si, et seulement si,  $(\rho(A)^2 I_n - {}^t A A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- (d) Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs. Montrer que  $M$  est radiale si, et seulement si,  $a = b$ .

On suppose que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  sont ordonnées de la manière suivante :

$$\rho(A) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

4. Montrer que  $A$  est radiale si, et seulement si,  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme suivante :

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s, B), \text{ avec } B = \begin{pmatrix} \lambda_{s+1} & (0) \\ & \ddots & \\ (b_{ij}) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ vérifiant } (\rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B) \in \mathcal{S}_{n-s}^+(\mathbb{R}).$$

(On pourra utiliser la décomposition de Schur).

(a) Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Vérifier que  $M$  est une matrice radiale.

La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

## Problème 2" D'après concours 2010"

Dans ce problème, on suppose que  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa base canonique, du produit scalaire canonique,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme euclidienne,  $\|\cdot\|$ , associée.

## Partie I

On considère  $S$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on pose

$$\|A\| = \sup_{X \in S} \|AX\|.$$

- 1) Montrer que  $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$  pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- 2) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$ .
- 3) Montrer que pour tout  $A$  et  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ , on a :  $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$ .
- 4) Soit  $U \in O_n(\mathbb{R})$  une matrice orthogonale. Montrer que  $\|AU\| = \|UA\| = \|U\|$  pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .
- 5) Montrer pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\rho(A) \leq \|A\|$ , où  $\rho(A) = \max\{\lambda_i; \lambda_i \text{ valeur propre de } A\}$ .
- 6) Soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 
  - a) Montrer que si  $\|B\| < 1$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} B^n$  converge

On notera  $S$  sa somme.

- b) Montrer que  $(I - B)$  est inversible et que son inverse est  $S$ .
- 7) Montrer que si  $(I - B)$  n'est pas inversible, alors  $\|B\| \geq 1$ .

## Partie II

Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$  une matrice symétrique positive.

- 1) Justifier qu'il existe une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$  avec les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$ , telles que

$$A = {}^t P D P.$$

- 2) Montrer que  $\lambda_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n$ .
- 3) On suppose que les valeurs propres de  $A$  sont ordonnées suivant l'ordre croissant  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et on considère  $V_1, \dots, V_n$  les vecteurs propres orthogonaux qui leurs sont associés. On pose

$$q_A(X) = \langle AX, X \rangle, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

- a) Montrer que  $q_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- b) Montrer que  $q_A(X) \geq \lambda_1 \|X\|^2$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- c) En déduire que  $q_A$  est bornée sur  $S$ .
- d) Montrer que  $AX = \lambda_n X$  si et seulement si  $\langle AX, X \rangle = \lambda_n \|X\|^2$ .
- e) Montrer que

$$\inf_{X \in S} (q_A(X)) = \lambda_1 \text{ et } \sup_{X \in S} (q_A(X)) = \lambda_n.$$

- f) Montrer que la suite  $(A^k X)_k$  converge vers  $O_{\mathbb{R}^n}$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si  $\lambda_n < 1$ .

- 4) Montrer que  $\|A\| = \lambda_n$ .

5) On suppose dans cette question que  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive. Pour  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , on considère la matrice  $B(\gamma) = I - \gamma A$ .

- a) Montrer que  $\lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ .
- b) Exprimer les valeurs propres,  $\mu_i(\gamma)$ , de  $B(\gamma)$  en fonction de  $\gamma$  et les valeurs propres de  $A$ .

c) On définit  $f_i(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_i|$  pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  et  $f(\gamma) = \max_{1 \leq i \leq n} f_i(\gamma)$ .

Montrer que  $f(\gamma) = \max(f_1(\gamma), f_n(\gamma))$

### Problème 3 "D'après concours 2012"

Dans ce problème on identifiera  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $M_{m,1}(\mathbb{R})$  respectivement à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  que l'on supposera munis de leurs produit scalaires canoniques.

#### Partie I

Soit  $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

a) Vérifier que  $ImA$  est un sous espace vectoriel de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

b) Soit  $p$  la projection orthogonale de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  sur  $ImA$ .

i) Justifier qu'il existe  $X_0 \in M_{m,1}(\mathbb{R})$  tel que

$$AX_0 = p(b).$$

ii) Montrer que

$$\|AX - b\|^2 \geq \|AX_0 - b\|^2, \quad \forall X \in M_{m,1}(\mathbb{R}).$$

iii) Conclure que

$$\min_{X \in M_{m,1}(\mathbb{R})} \|AX - b\| = \|AX_0 - b\|.$$

On dit que  $X_0$  est une pseudo-solution du système

$$AX = b \quad (S_1).$$

2) Montrer que si  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ , alors le système  $(S_1)$  admet une pseudo-solution unique.

3) Montrer que  $X_0$  est une pseudo-solution du système  $(S_1)$  si et seulement si pour tout  $X \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

$$\langle AX, AX_0 - b \rangle = 0.$$

4) En déduire que  $X_0$  est une pseudo-solution du système  $(S_1)$  si et seulement si

$${}^t AAX_0 = {}^t Ab.$$

#### Partie II

On note  $x_i = i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et on considère une famille de réels quelconques  $\{y_0, \dots, y_n\}$ .

Dans cette partie, on suppose  $0 \leq m \leq n$  et on cherche à trouver les polynômes  $P \in \mathbb{R}_m[X]$  tels que la quantité

$$\psi_m(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale.

Soit un polynôme  $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i \in \mathbb{R}_m[X]$ , on lui associe  $\xi = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in$

$M_{m+1,1}(\mathbb{R})$ .

- 1) Calculer  $P(x_i)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- 2) En déduire qu'il existe une matrice  $A \in M_{n+1, m+1}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_m) \end{pmatrix} = A\xi.$$

- 3) Calculer  $rg(A)$ .
- 4) Trouver  $b \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\psi_m(P) = \|A\xi - b\|^2$ .
- 5) Vérifier que

$$\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \psi_m(P) = \min_{\xi \in M_{m+1,1}(\mathbb{R})} \|A\xi - b\|^2.$$

- 6) Déduire qu'il existe un unique  $P_m \in \mathbb{R}_m[X]$  tel que

$$\min_{P \in \mathbb{R}_m[X]} \psi_m(P) = \psi_m(P_m).$$