

Devoir à la maison "Endomorphismes d'un Espace euclidien"

Problème 1 .

Soit $n \in \mathbb{N}$; $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A ", et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A .

On admet que Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$, telle que : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Pour toutes matrices $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, on pose : $(M, N) = \text{Tr}(MN)$.

Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l'application Φ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) = AM - MA$,
- les ensembles $Sp(A)$ et $Sp(\Phi_A)$ formés des valeurs propres de A et de Φ_A respectivement,
- l'ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in Sp(A)^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A .

Le but de cet exercice est d'établir les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,
- les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ , c'est-à-dire que $Sp(\Phi_A) = \Gamma$.

Partie II - Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que Φ_A est un endomorphisme symétrique.
4. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ .
Posons $M_{X,Y} = X^t Y \in M_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$.
 - (b) Montrer que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$, puis $\Gamma \subset Sp(\Phi_A)$.
5. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .
 - (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A , on a $MZ = 0$.
Montrer alors que $M = 0$.
En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
On note μ la valeur propre associée à Z_0 .
 - (b) Justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ .
 - (c) Conclure.

Partie III - Etude du rang de Φ_A

1. Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_l)$ deux familles libres de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(M_{X_i, Y_j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soient X, Y, X', Y' des vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $X \perp X'$ et $Y \perp Y'$ pour le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$.
 - (b) Montrer que si $\|X\| = \|Y\| = 1$, alors $\|M_{X,Y}\| = 1$.
 - (c) En déduire que si $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_l)$ deux familles orthonormales de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la famille $(M_{X_i, Y_j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ est orthonormale de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit λ une valeur propre de A , et soit n_λ la dimension du sous-espace propre E_λ de A associé à la valeur propre λ . et $(X_1, \dots, X_{n_\lambda})$ une BON de E_λ . b) Montrer que $(X_i X_j^T)_{1 \leq i, j \leq n_\lambda}$ est une famille orthonormée de $\ker(\Phi_A)$. On note F_λ le sous espace engendré par cette famille.
 - c) Donner la dimension de F_λ .
4. Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Montrer que $F_\lambda \perp F_\mu$.
5. a) Justifier que $\ker(\Phi_A) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} F_\lambda$. b) En déduire que $\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - \sum_{\lambda \in Sp(A)} n_\lambda^2$.
 - c) Quelle est le rang de Φ_A lorsque A est de rang 1 ? et lorsque A possède n valeurs propres deux à deux distinctes ?

Problème 2 .

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^m$ de sa base canonique et du produit scalaire usuel :

$$\langle x, y \rangle_m = \sum_{j=1}^m x_j y_j$$

avec $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$.

On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels, et $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on note ${}^t A$ la matrice transposée de A (${}^t A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$).

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire de matrice B .

1. a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire notée $u^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\langle u(x), y \rangle_p = \langle x, u^*(y) \rangle_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^p.$$

(On pourra caractériser u^* par sa matrice.)

- b) Vérifier que $(u^*)^* = u$ et que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $(P(u))^* = P(u^*)$

2. Montrer que l'endomorphisme $u^* \circ u$ est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont positives.
3. Montrer que $\ker u^* \circ u = \ker u$.
4. (a) Soit x un vecteur propre non nul de $u^* \circ u$ relativement à une valeur propre λ non nulle. Montrer que $u(x) \neq 0$ et que $u(x)$ est un vecteur propre non nul de $u \circ u^*$ pour la même valeur propre λ .

- (b) Soit λ est une valeur propre non nulle de u^*ou .
- a) Montrer que si $(V_1, \dots, V_m)$ est une base de $\ker(u^*ou - \lambda id)$, alors $(u(V_1), \dots, u(V_m))$ est une famille libre de $\ker(u \circ u^* - \lambda id)$.
- b) Dédurre que si λ est une valeur propre non nulle de u^*ou de multiplicité m , alors λ est une valeur propre de uou^* de multiplicité m .
- (c) En déduire que u^*ou et uou^* ont le même rang et que ce rang est égal au rang de u .
- (d) En déduire que si $n \geq p$, alors le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tBB$ est égal à $X^{n-p}P_{B^tB}$, avec P_{B^tB} le polynôme caractéristique de B^tB .

5. Soit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- (a) Donner le rang de la matrice X^tX .
- (b) En déduire que la matrice X^tX est semblable à la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \|x\|_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\|x\|_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$.

- (c) Si $\|x\|_n = 1$, montrer que la matrice $I_n - 2X^tX$ est orthogonale et que c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x .

6. Dans cette question on prend $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tBB$ et B^tB et donner sans calculs une matrice diagonale semblable à la matrice B^tB .

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $n \geq p$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe une matrice $B \in M_{n,p}$ telle que $A = B^tB$.
- (b) $\text{rang } A \leq p$ et les valeurs propres de A sont positives.

Partie II

Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est *normal* si $uu^* = u^*u$ et un endomorphisme u de E est dit *antisymétrique* si $u^* = -u$. Id désigne l'application identité de E .

I) Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit $u \in L(E)$, avec $L(E)$ l'algèbre des endomorphismes de F . On définit l'application $\varphi_u : L(E) \rightarrow L(E)$ par $\varphi_u(v) = uv - vu$, avec la convention $w = u \cdot v$.

- (1) (a) Démontrer que si $v \in \ker(\varphi_u)$, alors $v^m \in \ker(\varphi_u)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- (b)i) En déduire que si $v \in \ker(\varphi_u)$, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(v) \in \ker(\varphi_u)$.
- (c) Soit $v \in \ker(\varphi_u)$, montrer que pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(u)Q(v) = Q(u)P(v)$, puis Vérifier que $\ker(P(u))$ est stable par $Q(v)$.

- (2) Soit u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$. Vérifier que u est normal.
- (3) Soit u un endomorphisme **normal** de E .
- (a) Dédire de ce qui précède que pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(u)Q(u^*) = Q(u^*)P(u)$$

et que $P(u)$ est un endomorphisme normal.

c) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$ et en déduire que $\ker u^* = \ker u = \ker u^*u$ et que $\ker u = \ker u^2 = \ker u^m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

d) Caractériser les endomorphismes normaux et nilpotents.

II

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension 2. On se donne $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E .

A)

- (1) Montrer qu'un endomorphisme $v \in E$ est antisymétrique si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $(v(x), x) = 0$.
- (2) Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E .
- (a) Montrer que la matrice de v dans B est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}$, avec $w \neq 0$ et en déduire que $v^2 = -w^2 \text{Id}$.
- (b) Soit un vecteur $e \in E$ de norme 1. Montrer que $(e, \frac{v(e)}{|w|})$ est une base orthonormée de E et retrouver la matrice de v dans cette base.
- (3) Soit u un endomorphisme de E et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base B . avec α, β, γ et δ sont des nombres réels.
- Montrer que u est normal si, et seulement si, $(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) = 0$ et $(\beta - \gamma)(\alpha - \delta) = 0$.

(4) En déduire que

a) si $\beta = \gamma$, alors u est symétrique.

b) si $\beta \neq \gamma$, alors u n'admet pas de valeurs propres réelles et il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$