

Problème de Révision" Algèbre "

Calcul de la distance d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$

Notation

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n .

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\text{rg}(A)$ son rang ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Tr}(A)$ la trace de A et $\det A$ son déterminant.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

On note $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal euclidien et on rappelle que

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^tMM = I_n\}.$$

Partie I "Quelques résultats préliminaires"

On rappelle qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** si elle vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0.$$

1.1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice ${}^tMM$ est symétrique et positive.

On considère une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, \dots, x_n$. Exprimer le scalaire ${}^tXDX$ à l'aide de $d_1, \dots, d_n$ et $x_1, \dots, x_n$.

1.2. En déduire que la matrice symétrique D est positive.

1.3.1. Montrer que si une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive, alors ses valeurs propres sont positives.

1.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(i) Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPDR = A$.

(ii) En déduire que si les valeurs propres de A sont positives, alors A est une matrice positive.

1.4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP({}^tBB)P = \Delta$.

1.5. Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on notera $\| \cdot \|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

Partie II "Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ "

2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.

2.1.1. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, ${}^t A_i A_j = d_i^2 \delta_{i,j}$, avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Que vaut A_i lorsque $d_i = 0$?

2.1.2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_i = d_i E_i$.

2.1.3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

2.2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2.1. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t P^t B B P = D^2$.

2.2.2. Montrer alors qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $BP = ED$, puis en déduire qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice S symétrique positive, toutes deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $B = OS$.

2.3. Application

On pose $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique et positive, telles que $C = OS$.

Partie III"Application à un calcul de distance"

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t AB)$ et que

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM).$$

3.1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^t M M = I_n\}$.

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à calculer la distance

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2.$$

3.2. Justifier que cette borne inférieure est atteinte.

3.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\Omega A\|_2 = \|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive telles que $A = OS$.

3.4.1. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.4.2. On note D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = P D P^{-1}$. Justifier l'existence des matrices D et P puis montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.5. On conserve les notations de la question 3.4. précédente et on pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3.5.1. Justifier que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont ≥ 0 .

3.5.2. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

3.5.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2\text{Tr}(D\Omega) + n$.

3.5.4. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2$ puis que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2$.

3.6. Application

Calculer $d(C, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où C est la matrice définie par $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.