

2. La matrice de $u^* \circ u$ est ${}^tBB$ qui est une matrice carrée symétrique n , donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$ et $x \neq 0$ tel que $u^* \circ u(x) = \lambda x$, alors $\lambda \langle x, x \rangle_n = \langle u^* \circ u(x), x \rangle_n = \langle u(x), u(x) \rangle_p \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$.

3. $x \in \ker u^* \iff \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle y, u^*(x) \rangle_n = 0 \iff \nexists y \in \mathbb{R}^n, \langle x, u(y) \rangle_p = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$.

$x \in \ker u^* \circ u \Rightarrow \langle u^* \circ u(x), x \rangle_n = \langle u(x), u(x) \rangle_p = 0 \Rightarrow x \in \ker u$. Il est évident que $\ker u \subset \ker u^* \circ u$.

4. a) Si $u^* \circ u(x) = \lambda x$, alors $u(x) \neq 0$ et $u u^* \circ u(x) = \lambda u(x)$, donc $u(x)$ est un vecteur propre non nul de $u \circ u^*$ pour la même valeur propre λ .

b) L'endomorphisme $u^* \circ u$ de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme symétrique car sa matrice est ${}^tBB$, donc il est diagonalisable dans une base orthonormée. Si λ est une valeur propre non nulle de $u^* \circ u$ de multiplicité m , alors $\dim \ker(u^* \circ u - \lambda \operatorname{id}) = m$. Soit $(v_1, \dots, v_m)$ une base de $\ker(u^* \circ u - \lambda \operatorname{id})$, alors $(u(v_1), \dots, u(v_m))$ est un système libre de $\ker(u \circ u^* - \lambda \operatorname{id})$. Il en résulte que $\dim \ker(u \circ u^* - \lambda \operatorname{id}) \geq m$. Par réciproque $\dim \ker(u \circ u^* - \lambda \operatorname{id}) = m$ et λ est une valeur propre de $u \circ u^*$ de même multiplicité.

c) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles de $u^* \circ u$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_s$, alors $\mathbb{R}^n = \ker u^* \circ u \oplus (\oplus_{j=1}^s \ker(u^* \circ u - \lambda_j \operatorname{id}))$ et $\mathbb{R}^p = \ker u \circ u^* \oplus (\oplus_{j=1}^s \ker(u \circ u^* - \lambda_j \operatorname{id}))$. Donc $\operatorname{rang}(u \circ u^*) = \operatorname{rang}(u^* \circ u)$. De plus $\ker(u^* \circ u) = \ker u$. Donc $\operatorname{rang}(u^* \circ u) = \operatorname{rang} u$.

d) Si $n \geq p$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles de $u^* \circ u$ de multiplicité respectives $m_1, \dots, m_s$, et si $m = n - \sum_{j=1}^s m_j$, alors $P_{tBB} = (-1)^n X^{n-m} \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j)^{m_j}$ et $P_{BtB} = (-1)^p X^{p-m} \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j)^{m_j}$. Donc $P_{tBB} = (-1)^{n-p} X^{n-p} P_{BtB}$.

1/6

5. a) La matrice X est de type $(n, 1)$ et elle est de rang 1.

b) D'après ce qui précède la matrice $X^t X$ est semblable à une matrice diagonale de type $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$. Comme la trace de la matrice $X^t X$ est $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, alors $\lambda = \|x\|^2$.

b) Si $\|x\|_n = 1$, $H = I_n - 2X^t X$ est la matrice de l'endomorphisme $I - 2u \circ u^*$, avec u l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice X . $H^2 = (I - 2X^t X)(I - 2X^t X) = I - 4X^t X + 4X^t X X^t X = I$, car $X^t X = 1$.

Si $X^t Y = 0$, alors $HY = Y$, et $H\alpha X = \alpha X - 2\alpha X^t X X = -\alpha X$.

6. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^t B B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $B^t B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Donc $B^t B$ est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $p \leq n$.

a) $\Rightarrow$ b) résulte de ce qui précède. (Il suffit de prendre l'application linéaire $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ de matrice B .)

b) $\Rightarrow$ a) $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $p \leq n$ de valeurs propres positives. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres non nulles de A répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité, alors il existe une matrice P orthogonale telle que $A = P D^t P$, avec $D =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (0_{n-m}) \end{pmatrix}, \text{ avec } (0_{n-m}) \text{ la matrice nulle de } M_{n-m}(\mathbb{R}).$$

Comme le rang de A est au plus p , alors $m \leq p$. Il suffit de prendre la matrice $B = P D_p$.

$$\text{avec } D_p \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ la matrice } D_p = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (0_{n-m,p-m}) \end{pmatrix}.$$

avec $(0_{n-m,p-m})$ la matrice nulle de type $(n-m, p-m)$.

Partie I

1. (a) $v^m \in \text{Ker } \varphi_u \iff v^m u = u v^m$. Le résultat est vrai pour $m = 1$ puisque $v \in \text{Ker } \varphi_u$.
On suppose que $v^m \in \text{Ker } \varphi_u$, alors $v^{m+1} u = v v^m u = v u v^m = u v v^m = u v^{m+1}$. Donc $v^{m+1} u = u v^{m+1}$, ce qui démontre le résultat.

2 (b) On suppose que $v \in \text{Ker } \varphi_u$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(X) = \sum_{j=0}^m a_j X^j$, donc $P(v) = \sum_{j=0}^m a_j v^j$. Comme chaque $v^j \in \text{Ker } \varphi_u$ et que $\text{Ker } \varphi_u$ est un sous-espace vectoriel, alors $P(v) \in \text{Ker } \varphi_u$.

1 2. $v \in \text{Ker } \varphi_u \iff uv = vu \iff u \in \text{Ker } \varphi_v$.

2 Si $v \in \text{Ker } \varphi_u$, alors d'après ce qui précède pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(v) \in \text{Ker } \varphi_u \Rightarrow u \in \text{Ker } \varphi_{P(v)}$. Donc pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(u) \in \text{Ker } \varphi_{P(v)} \Rightarrow P(v)Q(u) = Q(u)P(v)$.

1 Si $x \in \text{Ker } Q(u)$, alors $Q(u)(P(v)(x)) = P(v)Q(u)(x) = 0$, ce qui prouve que $\text{Ker } Q(u)$ est stable par $P(v)$.

1 3. Si $u^* = P(u)$, alors $u^* u = P(u)u = uP(u) = uu^*$. Donc u est normal.

1 4. (a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Comme u est normal, alors $u \in \text{Ker } \varphi_{u^*}$, donc $P(u)Q(u^*) = Q(u^*)P(u)$.

1 Dans le cas où $Q = P$, ceci nous donne que $P(u)$ est un endomorphisme normal.

2 (b) Soit $x \in E$, alors $\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \langle x, u u^*(x) \rangle = \langle x, u^* u(x) \rangle = \|u(x)\|^2$.

1 $x \in \text{Ker } u \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff x \in \text{Ker } u^*$, donc $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$.

2 $x \in \text{Ker } u^* u \Rightarrow \langle u^* u(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } u$. Il est évident que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^* u$.

2 Montrons que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$. Il est évident que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$. Soit $x \in \text{Ker } u^2$, alors $u(x) \in \text{Ker } u = \text{Ker } u^*$, donc $0 = \langle u^* u(x), x \rangle = \|u(x)\|^2$. Il en résulte que

2
2
Ker $u = \text{Ker } u^2$. On suppose que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^m$ pour un $m \geq 2$ et montrons que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^{m+1}$. Il suffit de montrer que $\text{Ker } u^{m+1} \subset \text{Ker } u$. Soit $x \in \text{Ker } u^{m+1}$, alors $u^{m+1}(x) \in \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$, donc $x \in \text{Ker } u^m$.

2
1
(c) On a montré que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u)$ est normal. Donc $\text{Ker } P^m(u) = \text{Ker } P(u) = \text{Ker } P(u^*)$.

2
(d) Si u est un endomorphisme normal nilpotent de E , alors $\text{Ker } u = \text{Ker } u^n = E$, donc u est l'endomorphisme nul.

Partie II

A)

1
1
Soit v un endomorphisme de E antisymétrique et soit $x \in E$. Alors $\langle v(x), x \rangle = \langle x, v^*(x) \rangle = -\langle x, v(x) \rangle = \langle v(x), x \rangle$. Donc $\langle v(x), x \rangle = 0$.

2
Inversement si pour tout $x \in E$, $\langle v(x), x \rangle = 0$, alors pour tous $x, y \in E$, $\langle v(x+y), x+y \rangle = 0$. Donc pour tous $x, y \in E$, $\langle (v + v^*)(x), y \rangle = 0$. Il en résulte que $v + v^* = 0$.

2. Soit v un endomorphisme antisymétrique non nul de E .

(a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de v dans B , alors ${}^tA$ est la matrice de v^* dans B .

2
Comme ${}^tA = -A$, alors A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, avec $w \neq 0$, car v est non nul.

1
La matrice de v^2 est A^2 , donc $v^2 = -w^2 \text{Id}$.

(b) Soit e un vecteur de E de norme 1.

2
Comme v n'admet pas de valeur propre réelle, alors $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est un système libre. De plus $\langle e, \frac{1}{|w|}v(e) \rangle = 0$, d'après ce qui précède, donc $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est une base orthonormée de E . La matrice de v dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & -|w| \\ |w| & 0 \end{pmatrix}$.

1
Soit u un endomorphisme de E et $\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de u dans B .

3. u est normal si, et seulement, si $A^t A = {}^t A A$. Or ${}^t A A = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \alpha\beta + \gamma\delta & \beta^2 + \delta^2 \end{pmatrix}$ et

2 $A^t A = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \beta\delta & \gamma^2 + \delta^2 \end{pmatrix}$. Donc $A^t A = {}^t A A$ est équivalent à $(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) = 0$ et $(\beta - \gamma)(\alpha - \delta) = 0$.

2 4. (a) Si $\beta = \gamma$, alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Donc A est symétrique, et comme la base est orthonormée, alors l'endomorphisme u est symétrique.

1 (b) Si $\beta \neq \gamma$, alors les équations précédentes donnent: $\gamma = -\beta \neq 0$ et $\alpha = \delta$. Le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X - \alpha)^2 + \beta^2$. Comme $\beta \neq \gamma$, donc $\beta \neq 0$ et donc u n'admet pas de valeurs propres réelles. Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels

1 que $\alpha + i\beta = re^{i\theta}$, et donc $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

B)

Soit u un endomorphisme normal et soit P_u son polynôme caractéristique.

2 1. Si P_u est scindé sur $\mathbb{R}$, alors u admet au moins une valeur propre réelle α . Si e est un vecteur propre normé de u pour la valeur propre α et si e' est un vecteur orthogonal à e normé, alors il existe β et γ deux réels tels que $u(e') = \beta e + \gamma e'$. Donc la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

1 Comme u est normal et (e, e') est une base orthonormée, alors ${}^t A A = A^t A$, ce qui donne que $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Il en résulte que u est symétrique.

2 2. (a) On suppose que P_u n'admet pas de racines réelles. Comme P_u est un polynôme de degré 2 et unitaire, alors $P_u(x) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. β ne peut pas être nul vu que le polynôme P_u n'est pas scindé. Le couple est unique.

2 Comme $P_u(0) = \det u = \beta^2 \neq 0$, donc u est inversible.

2 (b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$, comme u est inversible, alors $u(x) \neq 0$. De plus $u(x)$ n'est pas colinéaire à x car u n'admet pas de valeurs propres réelles. Donc $(x, u(x))$ est une base de E .

2 Si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace de E , stable par u , alors si $x \in F \setminus \{0\}$, le système $(x, u(x))$ est une base de E et c'est un système libre de F , donc $F = E$.

2 (c) L'endomorphisme $u + u^*$ est symétrique, donc il est même diagonalisable dans une base orthonormée.

1 (d) Soit λ une valeur propre de $u + u^*$. On pose $E_\lambda = \text{Ker}(u + u^* - \lambda \text{Id})$. Si $x \in E_\lambda$, alors $(u + u^* - \lambda \text{Id})(u(x)) = (u^2 + u^*u - \lambda \text{Id})(x) = u(u + u^* - \lambda \text{Id})(x) = 0$. Donc E_λ est stable par u .

1 D'après ce qui précède $E_\lambda = E$. Donc $u + u^* = \lambda \text{Id}$. Si $\lambda = 2\mu$, alors $u + u^* = 2\mu \text{Id}$. ($u^* = -u + 2\mu \text{Id}$.)

1 3. (a) $u - u^*$ est antisymétrique, donc d'après les résultats de la partie II) A), il existe $\gamma > 0$ tel que $(u - u^*)^2 = -4\gamma^2 \text{Id}$.

3 (b) D'après ce qui précède, il existe une base orthonormée (e, e') de E telle que dans la quelle la matrice de $u - u^*$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -2\gamma \\ 2\gamma & 0 \end{pmatrix}$. Comme $u + u^* = 2\mu \text{Id}$ et c'est indépendant de la base. Comme $u = \frac{1}{2}((u + u^*) + (u - u^*))$, donc dans la base (e, e') , la matrice de u est $\begin{pmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$.

1 (c) Si $r = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} > 0$ et θ est l'argument du nombre complexe $\mu + i\gamma$, alors $\frac{1}{r}u$ est la rotation d'angle θ .

Partie III

I. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre-eux.

1 (a) Si $x \in \text{Ker } Q(u)$, alors $QR(u)(x) = RQ(u)(x) = 0$, donc $R(u)$ laisse stable $\text{Ker } Q(u)$.
2 Soit $x \in \text{Ker } Q(u) \cap \text{Ker } R(u)$, alors d'après l'identité de Bezout, il existe deux polynômes R_1 et Q_1 tels que $R_1 R + Q_1 Q = 1$, donc $(R_1 R + Q_1 Q)(u)(x) = x$.
2 Comme $R_1 R(u)(x) = 0$ et $(Q_1 Q)(u)(x) = 0$, donc $x = 0$.

2 (b) Il résulte de la question précédente que $\dim R(u)(\text{Ker } Q(u)) = \dim \text{Ker } Q(u)$, donc $R(u)(\text{Ker } Q(u)) = \text{Ker } Q(u)$.