

Décomposition polaire "Central 2013"

Partie I

A) $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $A =$ la matrice de U dans une B.O.N

U est symétrique définie positive $S\mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \langle U(x), x \rangle > 0$

$$\Leftrightarrow {}^t(AX)X > 0, \forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow {}^tX {}^tAX > 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX, AX > 0 \quad \forall X \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$$

(car U est symétrique $\Leftrightarrow$
 $\Pi(U, B)$ est symétrique avec $B = B^*$)

$$\Leftrightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

B) $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $S_p(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow$ on est pas v.p de S , d'où S est inversible.

D'autre par puisque $S = S$ et S est inversible, alors $({}^tS)^{-1} = S^{-1}$

$$\Leftrightarrow {}^tS^{-1} = S^{-1}$$

$\Rightarrow S^{-1}$ est symétrique.

De plus on a $S_p(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\forall \lambda \in \text{Sp } S \Leftrightarrow SX = \lambda X$; avec $X \neq 0$

$$\Leftrightarrow X = S^{-1}\lambda X = \lambda S^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow S^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$$

$$\Leftrightarrow S_p(S^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}; \text{ by } \lambda \in S_p(S) \right\}$$

$$\Rightarrow S_p(S^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$$

Ainsi S^{-1} est définie positive.

B) Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Symétrique définie positive.

C) Soit $V \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie positive by $V^2 = U$.
d.v.p de U

$$\text{On a. } VU = V \cdot V^2 = V^3 = V^2 \cdot V = U \cdot V$$

U et V commutent, alors le sous espace propre $E_\lambda^{(U)} = \ker(U - \lambda \text{Id})$ est stable par V , ce qui montre que V induit un endo sur $\ker(U - \lambda \text{Id})$.

On pose $\tilde{V}_\lambda: \ker(U - \lambda \text{Id}) \rightarrow \ker(U - \lambda \text{Id})$
 $x \mapsto V(x)$

Comme V est diagonalisable, alors $\tilde{V}$ est diagonalisable. Soit μ v.p de $\tilde{V}$, alors

$\exists n \neq 0$ ($n \in \ker(U - \lambda \text{Id})$) by $\tilde{V}_\lambda(n) = \mu n$
 $\Rightarrow V(n) = \mu n \Rightarrow V^2(n) = \mu^2 n$

Or $v^2 = U$, d'où $U(x) = p^2 x$
 et on a. $x \in E_\lambda(U) = \ker(U - \lambda Id)$
 $\Leftrightarrow U(x) = \lambda x$.
 D'où $p^2 x = \lambda x \Rightarrow p^2 = \lambda \quad (x \neq 0)$
 $\Rightarrow \underline{p = \sqrt{\lambda}} \quad (p > 0)$

ce qui montre que $Sp(\tilde{U}_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$
 et puisque $\tilde{U}_\lambda$ est diagonalisable, alors
 $\tilde{U}_\lambda = \sqrt{\lambda} Id_{\ker(U - \lambda Id)}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \ker(U - \lambda Id) ; \tilde{U}_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} x$

2) Puisque U est diagonalisable.
 alors

$E = \bigoplus_{i=1}^p \ker(U - \lambda_i Id_E)$
 avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les λ_p de U car $\neq$
 $\forall x \in E \exists ! x_i \in \ker(U - \lambda_i Id_E) ; \forall i \leq p$

$x = x_1 + \dots + x_p$
 $\Rightarrow U(x) = \sum_{i=1}^p U(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$
 ($U(x) = \lambda_i x, \forall x \in E_{\lambda_i}$)

Ainsi, d'où l'unicité, alors $U = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$
 l'existence. soit $U = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} x_i$ avec
 $x_i \in E_{\lambda_i}(U)$ et $U(x) = \sqrt{\lambda_i} x, \forall x \in E_{\lambda_i}$

alors $v^2(x) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} U(x_i)$
 $= \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$
 $= \sum_{i=1}^p U(x_i) = U(x)$

$\Rightarrow \underline{v^2 = U}$
 Comme $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p \ker(U - \lambda_i Id)$
 alors $B = (B_1, \dots, B_p)$ est une B.O.N
 de $\mathbb{R}^n$ avec B_i B.O.N de $\ker(U - \lambda_i Id)$
 $M(U, B) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow Sp(U) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \underline{U \text{ est défini positive}}$

Ce qui montre l'existence et l'unicité
 de U .
 3) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les λ_p de U
 deux à deux distincts.

On pose $L_1, L_2, \dots, L_p$ les polynômes de
 Lagrange associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$
 $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{(x - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \Rightarrow L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$

On pose $Q(x) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(x)$
 $Q \in \mathbb{R}[X]$ et vérifie $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$
 $\forall X \in \Pi_{\text{nil}}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X \cdot {}^t A \cdot A \cdot X = \|AX\|^2 > 0$
 or $\|AX\| = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0$ car
 A est inversible. ce qui est imp.
 $\Rightarrow {}^t X \cdot {}^t A \cdot A \cdot X > 0 \Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

2) puisque ${}^t A \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il
 existe un unique S tq ${}^t A \cdot A = S^2$ ($S \in S_n^+(\mathbb{R})$)

On pose $O = A \cdot S^{-1}$
 ${}^t O \cdot O = {}^t (A \cdot S^{-1}) \cdot A \cdot S^{-1} = {}^t S^{-1} \cdot {}^t A \cdot A \cdot S^{-1}$
 $= {}^t S^{-1} \cdot S^2 \cdot S^{-1} = I_n$

$\Rightarrow O \in O_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A = O \cdot S$
 Si $A = O \cdot S = {}^t A \cdot A = S^2$
 S est unique.
 D'après I-c)
 et puisque $O = A \cdot S^{-1} = S \cdot O$ est unique

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & -3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow {}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_{({}^t A \cdot A)}(X) = (X-4)(X-16)(X-36)$

$\Rightarrow {}^t A \cdot A$ admet 3 v.p. 2 a. 2 f.

$E_{36} = \text{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; E_4 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{16} = \text{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow {}^t A \cdot A = P \cdot D \cdot P^t$

avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$
 P est orthogonale car les vecteurs sont orthogonaux.

$\Rightarrow {}^t A \cdot A = S^2$ avec $S = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^t$

$S = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^t$

et $O = A \cdot S^{-1}$

D 1) $O(n) = \{A \in \Pi_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^t A \cdot A = I_n\}$

$O(n)$ est une partie compacte
 voir série préhilbertienne question de cours
 ex.

2) soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments
 de $S_n^+(\mathbb{R})$ tq $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$, moy $A \in S_n^+(\mathbb{R})$

On a $A_p \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x^T A_p x > 0$.

On pose $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $B \mapsto \varphi(B) = x^T B x$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
 $B, C \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(\lambda B + C) = x^T (\lambda B + C) x$
 $= \lambda x^T B x + x^T C x$
 $= \lambda \varphi(B) + \varphi(C)$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, alors φ est continu.

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$

alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varphi(A_p) = \varphi(A)$ (φ continu)

On a $\varphi(A_p) > 0 \Rightarrow \varphi(A) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

$\Leftrightarrow S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé

3) Montrons que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exists (A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une

suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$
 On a $A \in M_n(\mathbb{R})$, le nombre des v_p de A est finie, alors ...

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq n_0, \frac{1}{p} \notin Sp(A)$

On pose $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$

les v_p de A_p sont $\lambda_p = \lambda - \frac{1}{p}$

avec $\lambda \in Sp(A)$.

Comme $\frac{1}{p} \notin Sp(A) \Rightarrow \lambda_p \neq 0, \forall \lambda_p \in Sp(A_p)$

$\Rightarrow A_p \in GL_n(\mathbb{R}), \forall p \geq n_0$

De plus $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$

Ainsi $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, d'après 3) il existe

$(A_p) \subset GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$

D'après I-c.v. (i) $\exists O_p \in O(n)$ et

$S_p \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A_p = O_p \cdot S_p$.

$(O_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de

$O(n)$ qui est compact, alors il existe $(O_{\varphi(p)})$ une sous-suite

$$\vec{0} \downarrow (O_p) \quad O_{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} O \in O(n)$$

Comme $A_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)} \cdot S_{\varphi(p)}$

$$\Rightarrow {}^t O_{\varphi(p)} \cdot A_{\varphi(p)} = S_{\varphi(p)}$$

et on a ${}^t O_{\varphi(p)} \cdot A_{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^t O \cdot A$

con $(\pi, \nu) \mapsto \pi \cdot \nu$ est bilinéaire $\Rightarrow$ continu

Alors la suite $S_{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^t O \cdot A = S$

Puisque $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R}) = \text{fermé}$

Alors $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

Ainsi $A = O \cdot S$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

→ Ce couple n'est pas unique.

Pour $O = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$O \cdot S = S$
et $I_n \cdot S = S$ $O \neq I_n$

E) $\varphi: O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$
 $(O, S) \mapsto \varphi(O, S) = O \cdot S$

D'après 5. c) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A = O \cdot S$

$$\Leftrightarrow \forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \exists! (O, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$$

tq $\varphi(O, S) = A$

$\Leftrightarrow \varphi$ est bijective

• φ est bilinéaire sur une partie d'un e.v. n de dimension finie, alors φ est continu

• tq φ^{-1} est continu

$$\varphi^{-1}: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto (O, S) \text{ tq } (A = OS)$$

soit (A_p) une suite d'éléments

de $GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A \in GL_n(\mathbb{R})$

tq $\varphi^{-1}(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(A)$

on a $A_p = O_p \cdot S_p$ et $A = O \cdot S$

$\Rightarrow {}^t A_p \cdot A_p = S_p^2$

et on a $A_p \rightarrow A$ et ${}^t A_p \rightarrow {}^t A$, alors

${}^t A_p \cdot A_p \rightarrow {}^t A \cdot A$

$S_p^2 \rightarrow S^2$

comme (A_p) est une suite c.v., alors (A_p) est bornée et $\|S_p\| = \|{}^t A_p A_p\| = \|A_p\|^2$

(En supposant que $M_n(\mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|: M \mapsto \text{tr}({}^t M \cdot M)$)

$\Rightarrow (S_p)$ est une suite bonne
 Alors d'après le th de Bolzano-Weierstrass
 $\exists (S_{q(p)})$ s-suite tq $S_{q(p)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S' \in S_n^{++}$
 $\Rightarrow (S_{q(p)})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S'^2$
 or $(S_{q(p)})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S^2$ $\Rightarrow S^2 = S'^2$
 comme ${}^t A \cdot A = S^2 = S'^2$
 et A est inversible $\Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^{++}$
 D'après I-c/ S est unique.

$\Rightarrow \underline{S = S'}$
 $\Leftrightarrow S$ est la seule valeur d'adh. de (S_p)
 $\Pi q. (O_p)$ admet une seule valeur d'adh.
 soit $(O_{q(n)})$ s-suite cv. vers 0
 On a $A_{q(n)} = O_{q(n)} S_{q(n)} \Rightarrow S_{q(n)} = O_{q(n)}^{-1} A_{q(n)}$
 $\Rightarrow (S_{q(n)})$ sous suite cv. vers 0
 cv vers sa seule valeur d'adh. S
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{q(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} O_{q(n)} S_{q(n)} = 0$
 $\Rightarrow A = 0 \cdot S \Rightarrow 0 = S^{-1} A$
 Ce qui montre que 0 est unique
 • (O_p) suite d'éléments dans un compact
 et admet une seule v. d'adh, alors (O_p) cv vers 0
 $\Rightarrow (S_p)$ cv vers $S \Rightarrow A = 0 \cdot S$
 $\Rightarrow \varphi^{-1}(A_p) \rightarrow \varphi^{-1}(A)$

Partie II
 1) $U \cdot \bar{U} = I \Leftrightarrow {}^t \bar{U} = U^{-1} \Leftrightarrow (U^{-1})^t = U$
 1) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tq $A = U B U^{-1}$
 $= U$
 $\Rightarrow {}^t A = {}^t U^{-1} {}^t B {}^t U$
 $= \bar{U} {}^t B U$
 or $A \in M_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow {}^t \bar{A} = {}^t A$
 D'où ${}^t A = \bar{U} {}^t B U^{-1} = U {}^t B U^{-1}$
 soient $x, y \in M_n(\mathbb{R})$ tq $U = x + iy$
 on considère la fonction polynomiale
 $R(t) = \det(x + t y)$
 Puisque $R(i) \neq 0$, alors R est un poly
 non nul, alors R admet un nombre fini
 de racines réels. $\forall n \in \mathbb{R} \exists p \in \mathbb{R}$ tq
 $R(p) \neq 0 \Leftrightarrow \det(x + p y) \neq 0$
 $\Leftrightarrow x + p y \in GL_n(\mathbb{R})$
 b) On a $A = U B U^{-1} \Leftrightarrow A U = U B$
 $\Leftrightarrow A(x + iy) = (x + iy) B$
 $\Leftrightarrow A x = x B$ et $A y = y B$
 c) D'après b), on déduit que
 $A(x + p y) = (x + p y) B$
 soit $p = (x + p y)$, alors $p^{-1} B p^{-1} = A$

puisque ${}^t A = U {}^t B U^{-1}$
 alors ${}^t A = P {}^t B P^{-1}$

$\exists$ Puisque P est inversible, alors $\exists!$
 $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $P = O.S$

a) $P = O.S \Rightarrow {}^t P.P = S^2$

Pq $B S^2 = S^2 B \Leftrightarrow P(S^2)^{-1} B S^2 = B$

ma $(S^2)^{-1} B S^2 = ({}^t P P)^{-1} B {}^t P.P$

$= (P^{-1})({}^t P)^{-1} B {}^t P.P$

$= P^{-1} (P {}^t P P^{-1}) P$

$= P^{-1} ({}^t A) P = P^{-1} A.P = B$

Ainsi $\frac{B S^2 = S^2 B}{S \text{ est une racine de } S^2}$

d'après partie I) $\exists \varphi \in \mathbb{R}[X]$ tq

$S = \varphi(S^2)$

comm B et S^2 commutent
 B et $\varphi(S^2)$ " "

alors $\Rightarrow \underline{BS = SB}$

b) ma $BS = SB \Leftrightarrow S B S^{-1} = B$

$\Leftrightarrow {}^t P B ({}^t O.P)^{-1} = B$

$\Leftrightarrow {}^t O \cdot \underbrace{P B P^{-1}}_A ({}^t O)^{-1} = B$

$\Leftrightarrow {}^t O.A.O = B$
 $\Leftrightarrow \boxed{A = O B {}^t O}$

B) (*) $\begin{cases} {}^t A.A + {}^t X.X = I_n \\ {}^t A.X - {}^t X.A = 0_n \end{cases}$

Si X est une solution de (*) dans $GL_n(\mathbb{R})$

Alors $\forall Z \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

${}^t Z A.A Z + {}^t Z.X.X Z = {}^t Z.Z$

or X est inversible, d'où ${}^t X.X \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow {}^t Z.{}^t X.X Z > 0$

$\Leftrightarrow {}^t Z Z - {}^t Z A.A Z > 0$

$\Leftrightarrow {}^t Z (I_n - {}^t A.A) Z > 0$

$\Rightarrow I_n - {}^t A.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \lambda \text{ vp de } I - {}^t A.A, \dots$ alors

$d > 0$ or $d = 1 - p$ ou $p \text{ vp de } {}^t A.A$

$\Leftrightarrow 1 - p > 0$
 $\Leftrightarrow \underline{p < 1}$

or ${}^t A.A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \underline{p \in \mathbb{R}_+}$

$\Leftrightarrow Sp({}^t A.A) \subset [0, 1[$

$\Rightarrow$ hyp $Sp({}^t A.A) \subset [0, 1[$

X solution de (*) $\Rightarrow X \in GL_n(\mathbb{R})$

Alors d'après I.D.4/ $X = UH$
 avec $U \in O(n)$ et $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
 b) On a X vérifie (*) $\Rightarrow {}^tX \cdot X = I_n - {}^tAA$
 $\Rightarrow H^2 = I_n - {}^tAA$
 Puisque $Sp({}^tAA) \subset [0, 1]$
 $\Rightarrow Sp(I_n - {}^tAA) = \{1 - \lambda; \lambda \in Sp({}^tAA)\}$
 $\subset \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow I_n - {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$
 Alors d'après I.B) $\exists$ une unique
 matrice $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $H^2 = I_n - {}^tAA$
 c) Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$ tq $X = UH$
 avec $U \in O_n(\mathbb{R})$.

D'après la question. b) $\exists ! H$.
 On cherche $U \in O_n(\mathbb{R})$ tq $X = UH$
 D'après ① : ${}^tA \cdot X = {}^tX \cdot A \Rightarrow {}^tA \cdot UH = (UH) \cdot A$
 $\Rightarrow {}^tA \cdot U \cdot H = U \cdot H \cdot A$
 $\Rightarrow {}^tA \cdot U \cdot H = U \cdot H \cdot A$
 $\Rightarrow {}^tA \cdot U \cdot H = U \cdot H \cdot A$

Alors $B = {}^tA \cdot U \cdot H$ est symétrique.

Partie III

$A_p \in M^{\mathbb{R}}$

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1^{re} ligne

$$= (x-2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x-1)(x+1) - 0 + 0$$

on développe selon la 1^{re} colonne

$$= (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x)$$

b) soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|2-x| < 1 \Leftrightarrow |2-x| < 1$
 et on a l'app $\theta \mapsto \cos \theta$ est bij
 de $]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[$, alors $\exists ! \theta \in]0, \pi[$
 tq $\frac{2-x}{2} = \cos \theta \Leftrightarrow 2-x = 2 \cos \theta$

ona. $P_1(x) = x-2 = -2 \cos \theta = -\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$

$$\Rightarrow y_2 = (2 - \lambda_k) y_1 = 2 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(p+1)} y_1$$

$$= 2 \cos \frac{k\pi}{p+1} y_1$$

$$-y_1 + y_3 = -(2 - \lambda_k) y_2$$

$$\Rightarrow y_1 + y_3 = (2 - \lambda_k) y_2 = 2 \cos \frac{k\pi}{p+1} y_2$$

On prend $y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = 2 \cos \frac{k\pi}{p+1}$

pour $3 \leq j \leq p$ $y_j - 2 \cos \frac{k\pi}{p+1} y_{j-1} + y_{j-2} = 0$

(y_j) est une suite récurrente.

Alors l'eq caractéristique: $r^2 - 2 \cos \frac{k\pi}{p+1} r + 1 = 0$

$$\Delta = \left(-i \sin \frac{k\pi}{p+1}\right)^2 \Rightarrow r_1 = \cos \frac{k\pi}{p+1} - i \sin \frac{k\pi}{p+1}$$

$$r_2 = \cos \frac{k\pi}{p+1} + i \sin \frac{k\pi}{p+1}$$

$$\Rightarrow y_j = \alpha \cos j \frac{k\pi}{p+1} + \beta \sin j \frac{k\pi}{p+1}$$

or $y_1 = 1$ et $y_2 = 2 \cos \frac{k\pi}{p+1}$, alors.

$\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{p+1}}$

$$\Rightarrow y_j = \frac{\sin j \frac{k\pi}{p+1}}{\sin \frac{k\pi}{p+1}}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(2\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(p\frac{k\pi}{p+1}\right) \end{pmatrix}$$

IV $f: \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire $\exists S$

$A \in \Pi_n(\mathbb{R})$ tq $f(A) = \text{tr}(AS)$; $\forall \Pi$

B) 1) On a. f est linéaire sur $\Pi_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, alors f est continue sur $\Pi_n(\mathbb{R})$. En particulier f est continue sur $O_n(\mathbb{R})$ qui est compact alors f est bornée et atteint ses bornes sur $O_n(\mathbb{R})$. $\Rightarrow \Pi_n = \sup \{ f(O); O \in O(n) \}$ existe

2) $\exists A \in S_n^+(\mathbb{R})$ d'où A admet n v.p positive $\mu_1, \dots, \mu_n$.

$$3) \Pi_n = \sup \{ f(O); O \in O(n) \}$$

$$= \sup \{ \text{tr}(AO); O \in O(n) \}$$

or d'après I.4.4, $A = QS$ avec $Q \in O(n)$

$$\Rightarrow A-A = S^2$$

avec $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow S = P D^t P$

et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$

$$\Rightarrow \Pi_n = \sup \{ \text{tr}(ASO); O \in O(n) \}$$

$$= \sup \{ \text{tr}(SP D^t P O); O \in O(n) \}$$

$$= \sup \{ \text{tr}(D^t P O S P); O \in O(n) \}$$

$$= \sup \{ \text{tr}(D, O'); O' \in O(n) \}$$

car l'app $O(n) \rightarrow O(n)$

$$O \mapsto P \cdot O \cdot S \cdot P \text{ est bijective}$$

On a: $\Pi_n = \sup \{ h(D\Omega), \Omega \in O(n) \}$

$$h(D\Omega) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \cdot \Omega_{k,k}$$

$$\Omega \in O(n) \Leftrightarrow {}^t \Omega \cdot \Omega = I_n$$

$$\Leftrightarrow ({}^t \Omega \cdot \Omega)_{i,i} = \sum_{k=1}^n ({}^t \Omega)_{i,k} \Omega_{k,i} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\Omega_{k,i})^2 = 1 \Leftrightarrow \Omega_{k,k}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n (\Omega_{k,i})^2 = 1$$

$$\text{Donc } \Omega_{k,k}^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\Omega_{k,k}| \leq 1$$

Si $\Omega \in O(n)$, alors $|\Omega_{i,j}| \leq 1, \forall i,j$

$$\Rightarrow h(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \cdot 1, \forall \Omega \in O(n)$$

$$\text{Pour } \Omega = I_n, \text{ alors } h(DI_n) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k}$$

$$\text{Ainsi } \Pi_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k}$$