

Correction

Partie II – Réduction de Φ_A dans le cas général

1. Tout d'abord, le produit de deux matrices carrées d'ordre n étant encore une matrice carrée d'ordre n , et la somme de deux matrices carrées d'ordre n aussi, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, Φ_A est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

De plus, soit M, N deux matrices carrées d'ordre n , et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A = AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= (AM - MA) + \lambda(AN - NA) = \Phi_A(M) + \lambda\Phi_A(N).\end{aligned}$$

Ainsi, Φ_A est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. • Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN) = \text{Tr}({}^t({}^tMN)) = \text{Tr}({}^tNM) = \langle N, M \rangle,$$

car, la trace n'étant définie qu'avec les coefficients diagonaux, et la transposition laissant invariante ces coefficients diagonaux, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tA)$. Ainsi, $\langle -, - \rangle$ est symétrique.

- Soit $(M, N, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\langle M + \lambda N, P \rangle = \text{Tr}({}^t(M + \lambda N)P) = \text{Tr}({}^tM + \lambda {}^tN)P = \text{Tr}({}^tMP) + \lambda \text{Tr}({}^tNP) = \langle M, P \rangle + \lambda \langle N, P \rangle,$$

par linéarité de la transposition, puis par linéarité de la trace. Ainsi, $\langle -, - \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable, et la symétrie implique alors la linéarité par rapport à la deuxième variable aussi.

- Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit ${}^tM = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, et ${}^tMM = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. D'après la définition du produit matriciel, on a, pour tout $(i, k) \in [1, n]^2$:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n m'_{i,j} m_{j,k} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} m_{j,k}.$$

Ainsi,

$$\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i}^2 \geq 0.$$

- De plus, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs, $\langle M, M \rangle = 0$ si et seulement si chacun de ces termes est nul, donc si et seulement si pour tout $i \in [1, n]$, et pour tout $j \in [1, n]$, $m_{j,i} = 0$, donc $M = 0$.

Ainsi, il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc d'un produit scalaire.

3. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t(AM - MA)N) = \text{Tr}({}^tMAN - A {}^tMN) = \text{Tr}({}^tMAN) - \text{Tr}(A {}^tMN),$$

puisque A est symétrique, et de même,

$$\langle M, \Phi_A(N) \rangle = \text{Tr}({}^tMAN) - \text{Tr}({}^tMNA).$$

Or, d'après les propriétés de la trace rappelées en début d'énoncé,

$$\text{Tr}({}^tMNA) = \text{Tr}(A {}^tMN),$$

d'où finalement l'égalité :

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle.$$

On en déduit que Φ_A est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable.

4. (a) Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq n}$. Alors on a :

$$M_{X,Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \ \cdots \ y_n) = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Comme X et Y sont des vecteurs propres, ils sont non nuls. Il existe donc i_0 et j_0 dans $[1, n]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$. Alors le coefficient en position (i_0, j_0) de la matrice $M_{X,Y}$, égal à $x_{i_0} y_{j_0}$ est non nul, donc $M_{X,Y}$ est non nul.

Attention à ne pas dire trop vite que le produit de deux matrices non nulles est non nul. C'est faux en général.

De plus, on a

$$AY = \mu Y \quad \text{donc:} \quad {}^t(AY) = \mu {}^t Y \quad \text{donc:} \quad {}^t Y A = \mu {}^t Y,$$

puisque A est symétrique.

- (b) On a :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX {}^t Y - X {}^t Y A.$$

Or, $AX = \lambda X$, et d'après ce qui précède, ${}^t Y A = \mu {}^t Y$. Ainsi :

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = \lambda X {}^t Y - \mu X {}^t Y = (\lambda - \mu) M_{X,Y}.$$

Montrons qu'on a alors $\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A)$.

Soit $\nu \in \Gamma$. Par définition, il existe deux éléments λ et μ de $\text{Sp}(A)$ tels que $\nu = \lambda - \mu$. En considérant X et Y deux vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ , le calcul précédent, et le fait que $M_{X,Y} \neq 0$, prouve que $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A , associé à la valeur propre $\nu = \lambda - \mu$. Ainsi, $\nu \in \text{Sp}(\Phi_A)$. D'où l'inclusion.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .

- (a) Supposons que pour tout vecteur propre de A , $MZ = 0$. La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A . D'après l'énoncé, on a donc $Mb_i = 0$, pour tout $i \in [1, n]$. Tout élément de $\mathbb{R}^n$ pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des b_i , on obtient $MX = 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à M est nul, donc M est nul.

Or, cela n'est pas possible, étant donné qu'un vecteur propre n'est pas nul. Ainsi, l'hypothèse initiale est fautive, donc il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.

On note μ la valeur propre associée à Z_0 .

- (b) On a : $\Phi_A(M) = \alpha M = AM - MA$. Ainsi, en multipliant cette égalité à droite par Z_0 , il vient :

$$\alpha MZ_0 = AMZ_0 - MAZ_0 = AMZ_0 - \mu MZ_0, \quad \text{soit:} \quad A(MZ_0) = (\alpha + \mu)(MZ_0).$$

Comme MZ_0 est non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre, la valeur propre associée étant $\lambda = \alpha + \mu$.

- (c) Soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_A)$. La question précédente montre qu'il existe deux valeurs propres λ et μ de A telles que $\alpha = \lambda - \mu$, donc $\alpha \in \Gamma$. On en déduit l'inclusion $\text{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$, et comme on avait déjà prouvé l'inclusion réciproque, il s'agit d'une égalité.

Partie III – Étude du rang de Φ_A

1. Soit $(\lambda_{i,j})$, $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq \ell$, une famille de réels tels que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} M_{X_i, Y_j} = 0.$$

On a alors :

$$0 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} X_i {}^t Y_j = \sum_{i=1}^k X_i {}^t \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} Y_j \right).$$

pour tout $i \in [1, n]$, le vecteur $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} Y_j$ est un vecteur ligne. Notons-le $(\mu_{i,1} \dots \mu_{i,n})$. Ainsi, l'égalité précédente se réécrit :

$$\sum_{i=1}^k X_i (\mu_{i,1} \dots \mu_{i,n}) = 0.$$

Ainsi, la j -ième colonne du membre de droite est $\sum_{i=1}^k X_i \mu_{i,j}$. La nullité de toutes ces colonnes amène :

$$\forall j \in [1, \ell], \sum_{i=1}^k X_i \mu_{i,j} = 0.$$

Comme la famille $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in [1, k]$ et tout $j \in [1, \ell]$, $\mu_{i,j} = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [1, n]$, le vecteur

$$\begin{pmatrix} \mu_{i,1} \\ \vdots \\ \mu_{i,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{i,j} Y_j$$

est nul. Ainsi, la famille $(Y_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ étant libre, il en découle que pour tout $i \in [1, k]$, la famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq \ell}$ est nulle. Ainsi, pour tout $i \in [1, k]$, tout $j \in [1, \ell]$, $\lambda_{i,j} = 0$. D'où la liberté de la famille M_{X_i, Y_j} .

2. (a) On a :

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \text{Tr} ({}^t(X' Y')(X Y)) = \text{Tr}(Y' {}^tX X' {}^tY).$$

- Si $X \perp X'$, alors ${}^tX X' = 0$, donc $Y' {}^tX X' {}^tY = 0$, donc $\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = 0$.
- Si $Y \perp Y'$, alors ${}^tY Y' = 0$, donc

$$\langle M_{X,Y}, M_{X',Y'} \rangle = \text{Tr}((Y' {}^tX X') {}^tY) = \text{Tr}({}^tY(Y' {}^tX X')) = 0.$$

Ainsi, si $X \perp X'$ ou $Y \perp Y'$, alors $M_{X,Y} \perp M_{X',Y'}$.

(b) Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X\| = \|Y\| = 1$. On a alors :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \langle M_{X,Y}, M_{X,Y} \rangle = \text{Tr}({}^t(X Y)X Y) = \text{Tr}(Y' {}^tX X {}^tY) = \text{Tr}(Y' \|X\|^2 {}^tY) = \text{Tr}(Y' {}^tY) = \text{Tr}({}^tY Y).$$

Or, ${}^tY Y$ est un réel, donc une matrice de taille 1×1 . Ainsi :

$$\|M_{X,Y}\|^2 = \text{Tr}({}^tY Y) = {}^tY Y = \|Y\|^2 = 1.$$

Ainsi, on obtient bien $\|M_{X,Y}\| = 1$.

(c) Soient $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_{\ell})$ deux familles orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \neq (i', j')$ dans $[1, k] \times [1, \ell]$. Alors, soit $i \neq i'$, soit $j \neq j'$. Ainsi, soit $X_i \perp X_{i'}$, soit $Y_j \perp Y_{j'}$. Par conséquent, d'après la question 2(a), $M_{X_i, Y_j} \perp M_{X_{i'}, Y_{j'}}$. Par conséquent, la famille $(M_{X_i, Y_j})_{(i,j) \in [1,k] \times [1,\ell]}$ est orthogonale. De plus, d'après la question 2(b), les vecteurs de cette famille sont tous de norme égale à 1. Ainsi, il s'agit d'une famille orthonormale.

3. Soit λ une valeur propre de A , et soit n_{λ} la dimension du sous-espace propre E_{λ} de A associé à la valeur propre λ . Soit $(X_1, \dots, X_{n_{\lambda}})$ une base orthonormale de E_{λ} .

(a) D'après la partie II, les $X_i {}^tX_j$, $1 \leq i, j \leq n_{\lambda}$, sont des vecteurs propres de Φ_A , associés à la valeur propre $\lambda - \lambda$. Ainsi, ils sont dans $\text{Ker}(\Phi_A)$. De plus, d'après la question précédente, ils forment une famille orthonormale.

(b) Par définition de F_{λ} , $(X_i {}^tX_j)_{1 \leq i, j \leq n_{\lambda}}$ est une famille génératrice de F_{λ} . C'est aussi une famille libre, puisqu'elle est orthonormale. Elle est de cardinal n_{λ}^2 . Ainsi, on obtient : $\dim F_{\lambda} = n_{\lambda}^2$.

4. Soit $(X_1, \dots, X_{n_{\lambda}})$ une base orthonormale de E_{λ} et $(Y_1, \dots, Y_{n_{\mu}})$ une base orthonormale de E_{μ} . Alors $(X_i {}^tX_j)_{1 \leq i, j \leq n_{\lambda}}$ est une base de F_{λ} et $(Y_k {}^tY_{\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n_{\mu}}$. De plus, pour tout $(i, j) \in [1, n_{\lambda}]^2$, et tout $(k, \ell) \in [1, n_{\mu}]^2$, on a $X_i \perp Y_k$ (et aussi $X_j \perp Y_{\ell}$, mais une seule de ces deux propriétés suffit), car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux ; donc, d'après la question 2(a), $X_i {}^tX_j$ et $Y_k {}^tY_{\ell}$ sont orthogonaux. Cela étant vrai pour tout (i, j) et tout (k, ℓ) , on en déduit que les espaces qu'engendrent ces deux familles sont orthogonaux, soit : $F_{\lambda} \perp F_{\mu}$.

5. (a) Tout ce qui précède montre que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A), \quad \text{donc:}$$

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, cette somme est directe, car constituée de sous-espaces deux à deux orthogonaux. Ainsi :

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A).$$

De plus, si X et Y sont deux vecteurs propres de A , l'un associé à λ , l'autre à μ , avec $\lambda \neq \mu$, alors $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A , associé à $\lambda - \mu \neq 0$. Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux, il en résulte que $M_{X,Y} \in \text{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Ainsi, si $B_1, \dots, B_n$ désigne une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A , alors, pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$,

- soit $M_{X_i, X_j} \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$, si X_i et X_j sont associés à la même valeur propre
- soit $M_{X_i, X_j} \in \text{Ker}(\Phi_A)^\perp$, si X_i et X_j ne sont pas associés à la même valeur propre.

Par conséquent, tout vecteur M_{X_i, X_j} , $(i, j) \in [1, n]$, est soit dans $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$, soit dans $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$. Puisque $(M_{X_i, X_j})_{(i,j) \in [1,n]}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc une famille génératrice, on en déduit que

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda + \text{Ker}(\Phi_A)^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, cette somme est directe et orthogonale, car

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \subset \text{Ker}(\Phi_A),$$

et que $\text{Ker}(\Phi_A)$ et $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$ sont en somme directe. Ainsi, puisqu'on est en dimension finie, $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$ est

le supplémentaire orthogonal de $\text{Ker}(\Phi_A)^\perp$, donc

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda = \text{Ker}(\Phi_A).$$

(b) D'après le théorème du rang,

$$\text{rg}(\Phi_A) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim \text{Ker}(\Phi_A) = n^2 - \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda \right) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(F_\lambda) = n^2 - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} n_\lambda^2.$$

(c) Il faut supposer ici que $n \geq 2$.

- Si A est de rang 1, 0 est valeur propre, puisque A n'est pas de rang n , donc n'est pas inversible. La dimension de E_0 est alors $n - 1$, d'après le théorème du rang.

La matrice A étant diagonalisable, 0 ne peut pas être la seule valeur propre (sinon, la somme des dimensions des espaces propres n'est pas égale à n). Il existe donc au moins un autre espace propre.

Les espaces propres étant au moins de dimension 1, et la somme des dimensions des espaces propres ne pouvant excéder n , il ne peut y avoir qu'un autre espace propre, de dimension 1.

Ainsi, A a deux espaces propres, l'un de dimension $n - 1$, l'autre de dimension 1. On a alors

$$\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - (n - 1)^2 - 1^2 = 2n - 2.$$

C'était le cas de la matrice A de la partie I, avec $n = 2$. On avait bien $\text{rg}(\Phi_A) = 2 = 2 \cdot 2 - 2$.

- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A possède n espaces propres, tous de dimension 1. Ainsi :

$$\text{rg}(\Phi_A) = n^2 - 1^2 - \dots - 1^2 = n^2 - n = n(n - 1).$$

C'était aussi le cas de la matrice A de la partie I. Une vérification immédiate montre que la formule est aussi correcte dans cet exemple.