

Problème "Matrice Symétrique"

Partie I

$$S \in S_n(\mathbb{R})$$

1) a) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} {}^t x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ {}^t y \cdot x = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases} \Rightarrow {}^t x \cdot y = {}^t y \cdot x$$

b) $\langle x, Sy \rangle = \langle Sy, x \rangle = {}^t x \cdot Sy$
 et $\langle Sx, y \rangle = : {}^t (Sx) \cdot y = {}^t x \cdot {}^t S \cdot y$
 $= {}^t x \cdot Sy$
 (car S est symétrique)
 $\Rightarrow \langle x, Sy \rangle = \langle Sx, y \rangle$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

- $({}^t A)A = {}^t A \cdot A \Rightarrow {}^t A \cdot A$ est symétrique.
- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^t X \cdot ({}^t A \cdot A) X = {}^t (AX) \cdot AX = \|AX\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

3) a) $S \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ Soit une matrice symétrique réelle. D'après le théorème de la décomposition spectral $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\exists D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ tq $S = {}^t P \cdot D \cdot P$

b) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et d.v.p de S

$$\Rightarrow \exists X \neq 0 \text{ tq } SX = dX$$

$$\Rightarrow {}^t X \cdot SX = d {}^t X \cdot X = d \|X\|^2$$

$$\text{Or } {}^t X \cdot SX = 0 \Rightarrow d \|X\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow d = 0 \text{ (car } \|X\| \neq 0)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{0\}$$

Comme $S = {}^t P \text{diag}(d_1, \dots, d_n) P = 0$

4) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

$$S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \text{Soit } d \in \text{Sp}(S) \Leftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tq}$$

$$SX = dX \Rightarrow {}^t X \cdot SX = d \|X\|^2$$

$$\Rightarrow d \|X\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \underline{d \geq 0} \quad \forall d \text{ v.p de } S$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\Leftarrow \text{Puisque } S \text{ est symétrique réelle}$$

$$\Rightarrow \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tq } S = {}^t P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P$$

$$\Rightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$${}^t X \cdot SX = {}^t X \cdot {}^t P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P \cdot X$$

$$= {}^t Y \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot Y \text{ avec } Y = PX$$

$$= \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{S \in S_n^+(\mathbb{R})}$$

1. 5) $S \in S_n(\mathbb{R})$
 a) $\Rightarrow$ b) On a S est définie positive
 $\Rightarrow S$ positive, d'après ce qui précède
 $\forall \lambda$ v.p de S , et $X \neq 0$ vecteur propre.
 $\begin{aligned} {}^t X \cdot S \cdot X &= \lambda \cdot {}^t X \cdot X \\ &= \lambda \|X\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \end{aligned}$

$$\Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$$

b) $\Rightarrow$ a) Si $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

D'après ce qui précède.

$${}^t X S X = {}^t Y \cdot D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \text{ avec } Y = P X$$

$$\text{Supposons que } {}^t X \cdot S X = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i y_i^2 = 0, \forall i \leq n$$

$$\Leftrightarrow y_i^2 = 0, \forall i \leq n \text{ car } \lambda_i > 0, \forall i \leq n$$

$$\Rightarrow Y = 0 \Leftrightarrow P X = 0 \Rightarrow X = \vec{0} \text{ car } P \text{ est inversible}$$

$$\Rightarrow {}^t X \cdot S X > 0 \Rightarrow S \text{ est définie positive}$$

2) $\Rightarrow$ c) $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$$S = {}^t P S P = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

$$= {}^t P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_\Pi P$$

$$S = {}^t \Pi \cdot \Pi \text{ avec } \Pi = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$$

Puisque P est inversible et $\sqrt{\lambda_i} > 0$
 $\Rightarrow \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ est inversible, alors
 Π est inversible.

$$c) \Rightarrow d) \text{ On a } S = {}^t \Pi \cdot \Pi$$

d'après question 2) S est positive.

Puisque Π est inversible, alors
 Π est inversible.

d) $\Rightarrow$ b) On a S est positive, d'après 4/
 $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Comme S est inversible, alors on est pas
 $\forall p$ de $S \Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

D'où l'équivalence entre les 4 assertions

5) a) $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

et $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel $S = {}^t P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$

$$\Rightarrow S = {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \cdot \underbrace{{}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_T$$

$$\text{alors } S = {}^t T \cdot T \text{ avec } T = {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$$

c'est clair que T est symétrique.

De plus $Sp(T) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$

Alors $T \in S_n^+(\mathbb{R})$

~~2.6.9~~ T est unique.
On a $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ et vérifie $T^2 = S$

$$\Leftrightarrow T^2 = {}^t P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P$$

$$\Leftrightarrow {}^t P \cdot T^2 \cdot P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Leftrightarrow ({}^t P \cdot T \cdot P)^2 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Soit $\Delta = {}^t P \cdot T \cdot P$

Comme T est symétrique $\Rightarrow \Delta$ est symétrique

$$\bullet \text{Sp}(\Delta) = \text{Sp}(T) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\bullet \Delta^2 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

ce qui montre que $T = {}^t P \Delta P$
 $= {}^t P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$

d'où l'unicité de T

b) S est symétrique, on pose f l'endomorphisme de $\Pi_{n-1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à S alors f est symétrique, alors il existe

$B = (V_1, \dots, V_n)$ une B.O.N de $\Pi_{n-1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs propres de S .

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{(x - \mu_k)}{\mu_i - \mu_k}$$

V_k vecteur propre de S associée à λ_k

$$\Leftrightarrow S V_k = \lambda_k V_k$$

$$\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X] ; P(S) V_k = P(\lambda_k) V_k$$

Donc pour les polynômes de Lagrange

$$L_i(S) V_k = L_i(\lambda_k) V_k$$

$$\bullet \text{Si } \lambda_k = \mu_i \Rightarrow L_i(\lambda_k) = L_i(\mu_i) = 1$$

$$\Rightarrow L_i(S) V_k = V_k$$

$$\bullet \text{Si } \lambda_k \neq \mu_i \Rightarrow L_i(\lambda_k) = 0$$

$$\Rightarrow L_i(S) V_k = 0$$

$$\text{c) } P \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \text{ tq } P(\mu_i) = \sqrt{\lambda_i}$$

On a $\forall 1 \leq i \leq p ; \deg L_i \leq p-1$

$(L_1, \dots, L_p)$ forme une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ (déjà démontré libre et de cardinal p)

$$\Rightarrow P(X) = \sum_{k=1}^p \alpha_k L_k(X)$$

$$= \sum_{k=1}^p P(\mu_k) L_k(X)$$

$$= \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} L_k(X)$$

$$\text{D'après i) } P(S) V_k = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(S) V_k$$

$$= \sqrt{\lambda_k} V_k$$

$$\forall 1 \leq k \leq n: P(S) V_k = \sqrt{\lambda_k} V_k$$

$$\Rightarrow (P(S))^2 V_k = P(S) (P(S) V_k)$$

$$= P(S) \sqrt{\lambda_k} V_k$$

$$= \sqrt{\lambda_k} P(S) V_k$$

$$= (\sqrt{\lambda_k})^2 V_k = \lambda_k V_k$$

$$= S V_k$$

Comme $(V_1, \dots, V_n)$ est une B.O.N de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors $(P(S))^2 = S$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(S) = \sqrt{S}}$$

d) $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

On détermine $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$

$$\chi_S(X) = -\det(S - X I_3)$$

$$= - \begin{vmatrix} 7-X & 2 & -2 \\ 2 & 4-X & -1 \\ -2 & -1 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 = - \begin{vmatrix} 7-X & 2 & -2 \\ 2 & 4-X & -1 \\ 0 & 3-X & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= -(3-X) \begin{vmatrix} 7-X & 2 & -2 \\ 2 & 4-X & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} -(3-X) \begin{vmatrix} 7-X & 4 & -2 \\ 2 & 5-X & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -[(7-X)(5-X) - 8](3-X)$$

$$= (X-3)(X^2 - 12X + 27) = (X-3)^2(X-9)$$

(4)

$$\text{Sp}(S) = \{3, 9\} \text{ avec } \text{mul}(3) = 2 \text{ et } \text{mul}(9) = 1$$

D'après ce qui précède, on pose

$$L_1(X) = \frac{X-3}{9-3} \text{ et } L_2(X) = \frac{X-9}{3-9}$$

$$\text{et } P(X) = \sqrt{3} \cdot \frac{X-9}{3-9} + \sqrt{9} \cdot \frac{X-3}{9-3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = P(S) = \frac{\sqrt{3}}{-6}(S-9I_3) + \sqrt{9} \frac{S-3I_3}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})S + \left(\frac{9\sqrt{3}-3}{6}\right)I_3$$

$$\sqrt{S} = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})S + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{6}\right)I_3$$

Partie II

$$\text{I) } R_A(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2}$$

$B(V_1, \dots, V_n)$ B.O.N de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ formé des vecteurs propres de A ; $AV_i = \lambda_i V_i$

$$R_A(X) = \frac{\langle A \sum_{i=1}^n x_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j V_j \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

$$= \frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j V_j \rangle}{\langle \sum_{i=1}^n x_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j V_j \rangle}$$

$$= \frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j V_j \rangle}{\langle \sum_{i=1}^n x_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j V_j \rangle}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n x_j \langle V_i, V_j \rangle \right)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle V_i, V_j \rangle}$$

inme. $B = (v_1, \dots, v_n)$ est une B.O.N de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$R_A(X) = \frac{\sum_{i=1}^n d_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

2) $\forall 1 \leq i \leq n; d_1 \leq d_i \leq d_n$
 $\Rightarrow d_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \leq d_n \sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\Rightarrow d_1 \leq R_A(X) \leq d_n$$

3) $R_A(v_i) = \frac{\langle Av_i, v_i \rangle}{\frac{\|v_i\|^2}{1}} = d_i \frac{\langle v_i, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} = d_i$

4) On a $R_A(v_i) = d_1 \leq R_A(X) \leq d_n = R_A(v_n)$

Alors $\min_{x \neq 0} R_A(x) = d_1$
 et $\max_{x \neq 0} R_A(x) = d_n$

Montrons que la fonction R_A est continue sur $\Pi_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

• On a la fonction $x \mapsto \|x\|$ est 1 lipschitzienne ($|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$)
 alors elle est continue

La fonction $f: X \mapsto \langle AX, X \rangle$ est continue sur $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$
 Soit $g: \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \times \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$
 $x \mapsto (AX, x)$

et $h: \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \times \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

on a $f(x) = h \circ g(x)$

• $g(\lambda x + \gamma) = (A(\lambda x + \gamma), \lambda x + \gamma)$
 $= (\lambda Ax + A\gamma, \lambda x + \gamma)$
 $= \lambda g(x) + g(\gamma)$

$\Rightarrow g$ est linéaire de plus dim $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ } g est continue.

• $h = \langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire sur $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Alors h est continue.

Ainsi $\textcircled{1} f = h \circ g$ est continue sur $\Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$\textcircled{2} \Rightarrow R_A$ est continue sur $\Pi_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

* $F = \{x \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, x \rangle = \|x\|^2\}$
 $= \{0\} \cup \{x \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \mid \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} = 1\}$
 $= \{0\} \cup R_A^{-1}(\{1\})$
 R_A continue et $\{1\}$ est un fermé $\Rightarrow R_A^{-1}(\{1\})$ est un fermé
 $\Rightarrow F$ est un fermé.