

$$(2.3.1) \quad R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)}.$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, $(-a_k)$ est une racine de $\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)$

et n'en est pas pour $\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)$.

D'où les pôles de $R(x)$ sont les $(-a_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

En plus, ils sont tous simples car tous racines simples de $\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)$.

(2.3.2)

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x + a_j)} \in \mathbb{R}(x) \text{ et } d^{\circ}(R) = -1 < 0$$

en plus tous ses pôles, $(-a_j)_{1 \leq j \leq n}$, sont simples

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{x + a_k} \quad (12)$$

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x + a_j)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x + a_k}$$

(12)

Soit $1 \leq k \leq n$, $\alpha_k = ?$

Multiplications dans (12) par $(x + a_k)$, puis faisons tendre x vers $(-a_k)$, on obtient :

$$\alpha_k = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (-a_k - b_j)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (-a_k + a_j)} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{(-1)^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (a_k - a_j)}$$

c/c :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_k - a_j)}$$

2.4.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Notons $L'_1, \dots, L'_n$ ses lignes.

$$\text{Notons } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

La dernière ligne est :

$$\left(\left[\frac{\alpha_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_1} \right] \dots \left[\frac{\alpha_1}{a_2+b_n} + \dots + \frac{\alpha_n}{a_n+b_n} \right] \right)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\left(\frac{1}{a_1+b_1} \dots \frac{1}{a_1+b_n} \right)}_{L'_1} + \dots + \alpha_n \underbrace{\left(\frac{1}{a_n+b_1} \dots \frac{1}{a_n+b_n} \right)}_{L'_n}$$

$$= \alpha_1 L'_1 + \dots + \alpha_{n-1} L'_{n-1} + \alpha_n L'_n$$

Avec $L_n \leftarrow L_n - (\alpha_1 L'_1 + \dots + \alpha_{n-1} L'_{n-1})$ dans le déterminant Δ on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d_n}{a_n+b_1} & \frac{d_n}{a_n+b_2} & \dots & \frac{d_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = d_n \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = d_n \Delta_n} \quad \text{CQF D}$$

2.4.2

$$\text{On a } \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

$$\text{or } R(b_1) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$$

$$\text{Ainsi } \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \quad R(b_n) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la dernière ligne, on a :

$$\Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$$

2.4.3

(i) $\Delta_2 =$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{(a_2+b_1)(a_1+b_2) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \frac{a_2 b_2 + a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)}$$

(ii) M que :

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{(a_2 - a_1)b_2 + (a_1 - a_2)b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)} \\ &= \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq 2} (a_i + b_j)} \end{aligned}$$

Hérédité :

Soit $n \geq 2$.

Supposons que

$$\Delta_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

Et montrons que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

On a :

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{d_n} \Delta_{n-1}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k)} \cdot \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq n}} (a_n - a_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \cdot \Delta_{n-1}$$

$$\text{H.R.} = \frac{\left(\prod_{j=2}^{n-1} (b_n - b_j) (a_n - a_j) \right)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)}$$

Saviez-vous?

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} \right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{in} \right)$$

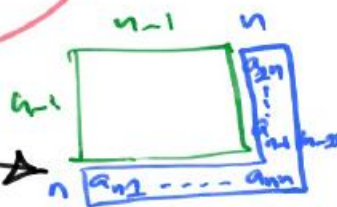
NB

$$\left(\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} x_{ij} \right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij}$$

Réponse

$$\left(\prod_{i=1}^n x_{in} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_{ni} \right)$$

NB



$$\Delta_n = \frac{\left(\prod_{j=2}^{n-1} (b_n - b_j)(a_n - a_j) \right)}{\prod_{k=1}^n (a_k + b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + b_j)}$$

CQFD

Fin partie I

2^{ème} partie

3.2 (i)

$$|G(u_1, u_2)| = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix}$$

$$= (u_1|u_1)(u_2|u_2) - (u_1|u_2)^2 \geq 0$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(ii) |G(u_1, u_2)| = 0 \Leftrightarrow (u_1|u_2)^2 = (u_1|u_1)(u_2|u_2)$$

$$\Leftrightarrow (u_1|u_2) \text{ est lié}$$

C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.2

$$\text{On a } G(u_1, \dots, u_p) = (u_i|u_j)_{1 \leq i, j \leq p}$$

$$\text{et que : } (\forall 1 \leq i, j \leq p, (u_i|u_j) = (u_j|u_i))$$

D'où la matrice $G(u_1, \dots, u_p)$ est symétrique

3.3.1

$$|G(w_1, \dots, w_p)| = \begin{vmatrix} (w_1|w_1) & \dots & (w_1|w_i) & \dots & (w_1|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|w_1) & \dots & (w_i|w_i) & \dots & (w_i|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_p|w_1) & \dots & (w_p|w_i) & \dots & (w_p|w_p) \end{vmatrix}$$

or $(\forall k \neq i, w_k = u_k)$, alors :

$$|G(w_1, \dots, w_p)| = \begin{vmatrix} (u_1 | u_1) & \dots & (u_1 | w_i) & \dots & (u_1 | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i | u_1) & \dots & (w_i | w_i) & \dots & (w_i | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p | u_1) & \dots & (u_p | w_i) & \dots & (u_p | u_p) \end{vmatrix}$$

On a : $w_i = u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_i | u_1) = (u_i | u_1) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_j | u_1) \\ \vdots \\ (w_i | u_p) = (u_i | u_p) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_j | u_p) \end{cases}$$

La i ème ligne de $|G(w_1, \dots, w_p)|$ est alors :

$$((u_i | u_1) \dots (u_i | u_p)) + \left(\sum_{j \neq i} \lambda_j (u_j | u_1) \dots \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_j | u_p) \right)$$

Càd : $((u_i | u_1) \dots (u_i | u_p)) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \lambda_j ((u_j | u_1) \dots (u_j | u_p))}_{= L_j, \text{ la } j^{\text{ème}} \text{ ligne}}$

Alors avec $L_i \leftarrow L_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$, on aura :

$$|G(w_1, \dots, w_p)| = \begin{vmatrix} (u_1 | u_1) & \dots & (u_1 | w_i) & \dots & (u_1 | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i | u_1) & \dots & (u_i | w_i) & \dots & (u_i | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p | u_1) & \dots & (u_p | w_i) & \dots & (u_p | u_p) \end{vmatrix}$$

On fait de même pour la i ème colonne :

On a : $w_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_1 | w_i) = (v_1 | v_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (v_1 | v_j) \\ \vdots \\ (v_p | w_i) = (v_p | v_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (v_p | v_j) \end{cases}$$

La i ème colonne de $|G(w_1, \dots, w_p)|$ est alors :

$$\begin{pmatrix} (v_1 | v_i) \\ \vdots \\ (v_p | v_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j \neq i} \lambda_j (v_1 | v_j) \\ \vdots \\ \sum_{j \neq i} \lambda_j (v_p | v_j) \end{pmatrix}$$

Càd $\begin{pmatrix} (v_1 | v_i) \\ \vdots \\ (v_p | v_i) \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} (v_1 | v_j) \\ \vdots \\ (v_p | v_j) \end{pmatrix}}_{= C_j \text{ la } j\text{ème colonne}}$

Alors avec $C_i \leftarrow C_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, on aura :

$$|G(w_1, \dots, w_p)| = \begin{vmatrix} (v_1 | v_1) & \dots & (v_1 | v_i) & \dots & (v_1 | v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_i | v_1) & \dots & (v_i | v_i) & \dots & (v_i | v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_p | v_1) & \dots & (v_p | v_i) & \dots & (v_p | v_p) \end{vmatrix}$$

$$= |G(v_1, \dots, v_p)| \quad \text{CQFD}$$

3.3.2 Supposons que $(v_1, \dots, v_p)$ est liée.

Alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \alpha_j v_j = 0 \\ \exists i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_i v_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j = 0$$

$$\Rightarrow v_i + \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j = 0$$

Notons pour tout $j \neq i$, $\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

On a alors $v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j = 0$

Posons
$$\begin{cases} w_k = v_k, \text{ pour tout } k \neq i \\ w_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j \end{cases}$$

D'après **3.3.1** on a : $|G(w_1, \dots, w_p)| = |G(v_1, \dots, v_p)|$

Or $w_i = 0$ alors $|G(w_1, \dots, w_p)| = 0$, car $L_i = 0$

$$\text{Donc } |G(v_1, \dots, v_p)| = 0 \quad \text{CQFD}$$

3.4.1

$$\text{On a } \begin{cases} v_j = \sum_{k=1}^p b_{k,j} e_k \\ v_i = \sum_{k=1}^p b_{k,i} e_k \end{cases}$$

et $(e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$

Alors $(v_i | v_j) = \sum_{k=1}^p b_{k,i} b_{k,j}$

3.4.2 Soit $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$.

Il s'agit de montrer que $(v_i | v_j) = ({}^t B \cdot B)_{ij}$

On a $({}^t B \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^p ({}^t B)_{ik} (B)_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^p B_{ki} B_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^p b_{ki} b_{kj}$$

$$\| B_{ij} = b_{ij}$$

$$= (v_i | v_j) \text{ (d'après 3.4.1)}$$

3.4.3 $|\mathcal{G}(v_1, \dots, v_p)| = \det({}^t B \cdot B)$

$$= \underbrace{\det({}^t B)}_{= \det(B)} \det(B)$$

$$= (\det(B))^2 \geq 0$$

Reste à justifier que $\det(B) \neq 0$.

On a $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$; avec $\begin{cases} v_j = \sum_{k=1}^p b_{k,j} e_k \\ \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$

Cad $B = \text{mat}(v_1, \dots, v_p)$ qui est invertible
 ($e_1, \dots, e_p$)

en tant que matrice d'une base dans une base
 (ou matrice de passage d'une base à une base)

D'où $\det(B) \neq 0$

3.5.1 $x = \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp} + P_F(x)$ et $(x - P_F(x)) \in F^\perp$

$$G(v_1, \dots, v_n, x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|x) \\ (x|v_1) & \dots & (x|v_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on a :

$$(v_i|x) = \underbrace{(v_i|(x - P_F(x)))}_{=0} + (v_i|P_F(x)) = (v_i|P_F(x))$$

$$(x|v_i) = (P_F(x)|v_i)$$

$$\text{Et } (x|x) = \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$$

$$G(v_1, \dots, v_n, x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) & +0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) & +0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) & + \|x - P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$G(v_1, \dots, v_n, x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) + \|x - P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) \end{vmatrix} +$$

$$= |G(v_1, \dots, v_n, P_F(x))|$$

$$\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & \|x - P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \|x - P_F(x)\|^2 |G(v_1, \dots, v_n)|$$

3.5.2

$$P_F(x) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow (v_1, \dots, v_n, P_F(x)) \text{ li  }$$

$$\Rightarrow |G(v_1, \dots, v_n, P_F(x))| = 0$$

3.5.1 $\Rightarrow |G(v_1, \dots, v_n, x)| = \underbrace{\|x - P_F(x)\|^2}_{=(d(x, F))^2} |G(v_1, \dots, v_n)|$

D'où

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{|G(v_1, \dots, v_n, x)|}{|G(v_1, \dots, v_n)|}}$$

3.6.1 $\det_{B_c}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^n$

D'où $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3.6.2 $\begin{cases} \text{Si } i \leq j, (v_i | v_j) = i \\ \text{Si } i > j, (v_i | v_j) = j \end{cases}$

$$\Rightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (v_i | v_j) = \min(i, j) = a_{ij})$$

D'où $A_n = ((v_i | v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, qui est donc une matrice de Gram.

3.6.3

i) A_n est une matrice symétrique réelle

Donc elle est orthogonalement diagonalisable.

ii) Soit $\lambda \in Sp(A_n)$, M que $\lambda \geq 0$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_n X = \lambda X$.

3.4.2 $\Rightarrow$ (il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$)
telle que $A_n = {}^t B \cdot B$

$$\begin{aligned}
A_n X &= \lambda X \Rightarrow {}^t B B X = \lambda \cdot X \\
&\Rightarrow {}^t X \cdot {}^t B B X = {}^t X \cdot (\lambda X) \\
&\Rightarrow {}^t (B X) \cdot (B X) = \lambda ({}^t X \cdot X) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \|B X\|^2 = \lambda \|X\|^2 \\ \text{ou } \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Et on a $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$.

et $\|B X\|^2 > 0$ car $B X \neq 0$, puis $X \neq 0$ et B invertible

donc $\boxed{\lambda > 0}$

Fin partie 2

Partie 3

4.1 (Cours)

4.2.1 $P_k = X^k$

$$(P_{n_i} | P_{n_j}) = \frac{1}{n_i + n_j + 1}$$

4.2.2

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \begin{vmatrix} (P_{n_1} | P_{n_1}) & \dots & (P_{n_1} | P_{n_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_{n_p} | P_{n_1}) & \dots & (P_{n_p} | P_{n_p}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(n_1+1)+n_1} & \dots & \frac{1}{(n_1+1)+n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n_p+1)+n_1} & \dots & \frac{1}{(n_p+1)+n_p} \end{vmatrix}$$

$= \Delta_p$: le déterminant de Cauchy

associé à la famille (n_k+1) et (n_k) $1 \leq k \leq p$

Donc d'après 2.4.3 on a :

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} ((n_j+1) - (n_i+1)) (n_j - n_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}$$

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}$$

4.2.3 $(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$
 Comme famille de polynômes non nuls échelonnée de degrés.

4.2.4 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors: $d(P_n, \mathcal{W}_p) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \prod_{k=1}^p \frac{|n_k - n|}{n_k + n + 1}$

$(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une base de $\mathcal{W}_p$.

$$(3.5.2) \Rightarrow d(P_n, \mathcal{W}_p) = \sqrt{\frac{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_n)|}{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})|}}$$

$$(4.2.2) \Rightarrow |G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)} \quad (\text{les } n_i \text{ distincts})$$

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_n)| = ?$$

Cas 1: Si $n \in \{n_1, \dots, n_p\}$

$$P_n \in \mathcal{W}_p \Rightarrow d(P_n, \mathcal{W}_p) = 0$$

$$\text{et } \prod_{k=1}^p \frac{|n_k - n|}{n_k + n + 1} = 0$$

Alors l'égalité voulue est vérifiée

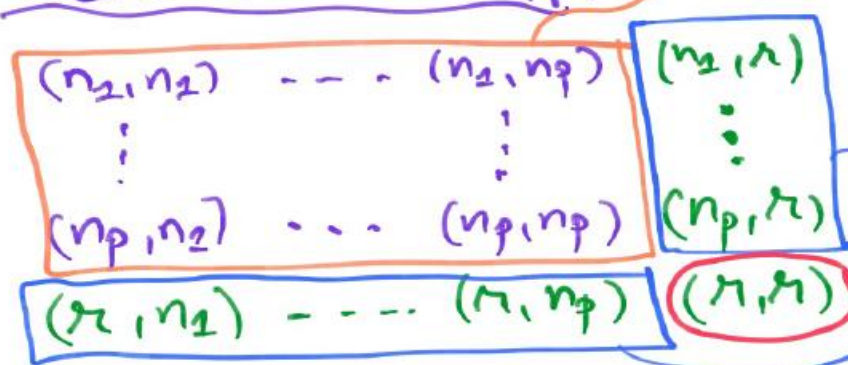
Cas 2: Si $n \notin \{n_1, \dots, n_p\}$

Alors les entiers $n_1, \dots, n_p, n$ sont distincts deux à deux.

D'après (4.2.2) on a :

$$|G(p_{n_1}, \dots, p_{n_p}, \mathbb{I}_n)| = \frac{\left[\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2 \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^p (n - n_i)^2 \right]}{\left[\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + n_j + 1) \right] \left[\prod_{i=1}^p (n + n_i + 1) \right]^2 (n + n + 1)}$$

Schéma illustratif :



Avec $|G(p_{n_1}, \dots, p_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}$

On a :

$$d(p_n, w_p) = \sqrt{\frac{|G(p_{n_1}, \dots, p_{n_p}, \mathbb{I}_n)|}{|G(p_{n_1}, \dots, p_{n_p})|}}$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^p |n - n_i|}{\left(\prod_{i=1}^p (n + n_i + 1) \right) \cdot \sqrt{2n+1}}$$

4.3.1 Il s'agit de montrer que :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \Psi(a_1, \dots, a_n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 dt \\ &= \left(1 - a_1 X - \dots - a_n X^n \mid 1 - a_1 X - \dots - a_n X^n \right)_2 \\ &= \| 1 - a_1 X - \dots - a_n X^n \|_2^2 \\ &= \| 1 - (a_1 X + \dots + a_n X^n) \|_2^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Psi(x_1, \dots, x_n) = \left(d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) \right)^2}$$

Alors il s'agit de montrer que :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left(d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) \right)^2 = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \left(d(1, x_1 X + \dots + x_n X^n) \right)^2$$

Càd :

$$\exists! (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, d(1, a_1 X + \dots + a_n X^n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} d(1, x_1 X + \dots + x_n X^n)$$

Notons $F = \{ x_1 X + \dots + x_n X^n \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$

Il s'agit de montrer que :

$$\exists! Q \in F, d(1, Q) = \inf_{P \in F} (d(1, P)) = d(1, F)$$

Cad : $(\exists! Q \in F, d(1, Q) = d(1, F))$

Ce qui est vrai car F est un sev de dimension finie ($=n$) de l'espace préhilbertien réel $(\mathbb{R}[x], (\cdot, \cdot))$

4.3.2

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ l'unique point de $\mathbb{R}^n$ dans (4.3.1)

Cad $Q(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$ est l'unique élément de F vérifiant $d(1, Q) = d(1, F)$.

$$\Psi(a_1, \dots, a_n) = \|1 - Q\|^2 = (d(1, F))^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{on applique} \\ (4.2.4) \end{array} \right)$$

$$\text{On a } F = \text{Vect}(x, \dots, x^n) = \text{Vect}(\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_n)$$

Alors :

$$\Psi(a_1, \dots, a_n) = (d(\mathbb{I}_0, F))^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} n=0 \\ n_1=1 \\ \vdots \\ n_n=n \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(4.2.4)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \times 0 + 1}} \prod_{k=1}^n \frac{|k-0|}{(k+0+1)} \right)^2$$

$$= \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \right)^2 \quad (\text{Produit télescopique})$$

%

$$\Psi(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Fin