

Probleme "Polynôme d'Hermite"

Partie I

$E = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}); x \mapsto f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est intég sur } \mathbb{R} \}$

1) a) si f et g sont deux éléments de E , alors la fonction $x \mapsto f(x)g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$$|f(x)g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}| = |f(x) e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot g(x) e^{-\frac{x^2}{4}}|$$

$$\leq \frac{1}{2} [|f(x) e^{-\frac{x^2}{4}}|^2 + |g(x) e^{-\frac{x^2}{4}}|^2]$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}| \leq \frac{1}{2} (f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + g^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}})$$

Puisque f et $g \in E$, alors $x \mapsto f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto g^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Ce qui montre que $x \mapsto f(x)g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$: C'est un $\mathbb{R}$ -e.v.

• $0 \in E$.

• Soient $f \in E, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

alors $\lambda f + g$ est C^∞ de plus

$$(\lambda f + g) e^{-\frac{x^2}{2}} = (\lambda f e^{-\frac{x^2}{2}} + g e^{-\frac{x^2}{2}} + e \lambda f \cdot g) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \underbrace{\lambda f e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{intég}} + \underbrace{g e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{intég}} + e \underbrace{\lambda f \cdot g}_{\text{intég (a)}}$$

$$\Rightarrow \lambda f + g \in E$$

Ainsi E est un s.e.v. de $C^\infty(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow E$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

2) $\langle ;, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

• Si $f \in E$ et $g \in E$, alors d'après 1)a.

$f g e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable $\Rightarrow$ l'app $\langle ;, \cdot \rangle$ est bien définie

• $\langle ;, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés du produit scalaire.

3) $F = \{ f \in E ; f(0) = 0 \}$

a) Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto \varphi(f) = f(0)$$

φ est linéaire

$\Rightarrow F$ est un s.e.v. de E

• $F = \ker \varphi$

b) Soit $f \in F^\perp$

$$\forall g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} f(x)$$

alors $f \in F^\perp \Rightarrow f \in E \Rightarrow f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ est C^∞ . D'où g est C^∞

$$|g(x) e^{\frac{x^2}{2}}| = \left| \frac{x^2}{1+x^2} f(x) e^{\frac{x^2}{2}} \right|$$

$$\leq |f(x)| e^{\frac{x^2}{2}} \text{ qui est int\'eg. sur } \mathbb{R}$$

D'où $x \mapsto g(x) e^{\frac{x^2}{2}}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$
 Ainsi $g \in F$.

(i) soit $f \in F^\perp \Rightarrow g: x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} f(x) \in F$
 $\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} |f(x)| \right)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} f \right\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comme f est continu sur $\mathbb{R}$, alors

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi $F^\perp = \{0\}$

(iii) Supposons que $E = F \oplus F^\perp$
 Comme $F^\perp = \{0\}$, alors $E = F$
 ce qui est impossible car
 la fonction $h: x \mapsto 1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$
 $h^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ est int\'egrable sur $\mathbb{R}$
 et $h(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow h \in E$
 et $h \notin F$.

Ce qui montre que la d\'ecomposition
 n'est pas valable.

Partie II

i) a) $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
 h est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$h^{(0)}(x) = h(x) = P_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
 avec $P_0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons qu'il existe
 un poly P_n tq $h^{(n)}(x) = P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
 montrons le r\'esultat pour $n+1$.

$$h^{(n+1)}(x) = (h^{(n)}(x))' = (P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}})'$$

$$= P_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - x P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= (P_n'(x) - x P_n(x)) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

alors il existe $P_{n+1}(x) = P'_n(x) - x P_n(x)$
un polynôme.

D'où le résultat à l'ordre n .

b) $P_0 = 1$

$h'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} = P_1(x) h(x)$
avec $P_1(x) = -x$

$P_2(x) = P'_1(x) - x P_1(x)$

$P_2(x) = -1 + x^2$

$P_3(x) = P'_2(x) - x P_2(x)$
 $= 2x - x(-1 + x^2)$

$P_3(x) = -x^3 + x$

c) Montrons par récurrence la propriété

$P(n):$ $\begin{cases} \cdot \deg P_n \\ \cdot \text{coef dom } P_n = (-1)^n \\ \cdot P_n \text{ a m parité que } n \end{cases}$

le résultat est vrai pour $n=0$
soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est
vrai et montrons $P(n+1)$

$\deg P_{n+1} = \deg (P'_n - x P_n) = \deg (-x P_n)$
(car $\deg P'_n < \deg x P_n$)

$= n+1$
 $\cdot \text{coef dom } P_{n+1} = \text{coef dom } (-x P_n)$
 $= (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$

$\cdot$ On a P_n a m parité que $n \Leftrightarrow$
 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \Rightarrow -P'_n(x) = (-1)^n P'_n(x)$

$P_{n+1}(-x) = P'_n(-x) + x P_n(-x)$
 $= (-1)^{n+1} (P'_n(x) + (-1)^n x P_n(x))$
 $= (-1)^{n+1} (P'_n(x) - x P_n(x))$
 $= (-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$

$\Rightarrow P_{n+1}$ a m parité que $n+1$.

2) a) $\forall P_n$ vérifie $(E_n): y'' - xy' + ny = 0$
On a $h^{(n+2)}(x) = P_{n+2}(x) h(x)$

$= (P'_{n+1}(x) - x P_{n+1}(x)) h(x)$
 $= (P''_n(x) - P_n(x) - x P'_n(x) - x (P'_n(x) - x P_n(x))) h(x)$
 $= (P''_n(x) - 2x P'_n(x) + (x^2 - 1) P_n(x)) h(x)$

D'autre part:
 $h^{(n+2)}(x) = (h'(x))^{(n+1)} = (-x h(x))^{(n+1)}$

$1, x, x^2, \dots, x^2, 0, \dots, -x^2, 1$
 D'après la formule de Leibniz,

$$(-x h(x))^{(n+1)} = - \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k x^{(k)} h^{(n+1-k)}(x)$$

$$= - \left(C_n^0 x h^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 h^{(n)}(x) \right)$$

$$= - \left(x p_{n+1}'(x) h(x) + (n+1) p_n(x) h'(x) \right)$$

$$= - \left(x p_n'(x) - x^2 p_n''(x) + (n+1) p_n(x) \right) (h'(x)) \quad \textcircled{2}$$

Par égalité de ① et ②, on obtient:

$$p_n''(x) - 2x p_n'(x) + (x^2 - 1) p_n(x) = - (x p_n'(x) - x^2 p_n''(x) + (n+1) p_n(x))$$

$$\Leftrightarrow p_n''(x) - x p_n'(x) + n p_n(x) = 0$$

ce qui montre que p_n vérifie l'éq diff

$$(E_n): y'' - x y' + n y = 0$$

b) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $p_n' = -n p_{n-1}$

$$p_n' = (p_{n-1}' - x p_{n-1}(x))'$$

$$= p_{n-1}'' - x p_{n-1}' - p_{n-1}(x)$$

$$= -(n-1) p_{n-1} - p_{n-1} = -n p_{n-1}$$

3) Soit $N \geq 2$.

$$\varphi: \mathbb{R}_N[x] \rightarrow \mathbb{R}_N[x]$$

$$P \mapsto \varphi(P) = P'' - x P'$$

a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_N[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)'' - x(\alpha P + Q)'$$

$$= \alpha(P'' - x P') + (Q'' - x Q')$$

$$= \alpha \varphi(P) + \varphi(Q)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire.

de plus si $P \in \mathbb{R}_N[x]$, ($\deg P \leq N$)

$$\Rightarrow \deg \varphi(P) = \deg(x P') \leq 1 + N - 1 = N.$$

Ainsi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_N[x]$.

Alors φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[x]$.

b) $\varphi(1) = 0, \varphi(x) = -x$

$\forall 2 \leq k \leq N$.

$$\varphi(x^k) = k(k-1) x^{k-2} - x k x^{k-1}$$

$$= k(k-1) x^{k-2} - k x^k$$

$$\text{Alors } \Pi(\mathcal{L}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(N-1)}(x) \\ \varphi^{(N)}(x) \end{matrix}$$

c) La matrice $\Pi(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ est triangulaire supérieure, alors $\text{Sp}(\mathcal{L}) = \{ \lambda_k = -k; 0 \leq k \leq N \}$.
Les vp de $\mathcal{L}$ sont en nombre $(N+1)$ deux à deux distincts. $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ admet $(N+1)$ vp.
Alors $\mathcal{L}$ est diagonalisable.

d) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(P), Q \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(P)(x) Q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}})' e^{\frac{x^2}{2}} Q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(x) e^{\frac{x^2}{2}})' Q(x) dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[P'(x) Q(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

D'autre part.

$$\langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle = \langle \mathcal{L}(P), Q \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ainsi.

$$\langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle = \langle \mathcal{L}(P), Q \rangle$$

$\Leftrightarrow \mathcal{L}$ est un endo symétrique.

$$\text{e) Soit } H_n = (-1)^n P_n \neq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_n) &= H_n'' - x H_n' \\ &= (-1)^n (P_n'' - x P_n') = (-1)^n (-n P_n) \end{aligned}$$

(d'après (E_n))

$$= -n H_n$$

$\Rightarrow H_n$ vecteur propre de $\mathcal{L}$ associé à la valeur propre $-n$; $\forall 0 \leq n \leq N$.

Puisque $\mathcal{L}$ est symétrique, alors

$$\mathbb{R}_N[X] = \bigoplus_{k=0}^N E_{\lambda_k} \quad (\text{avec } E_{\lambda_k} = \text{Vect}(H_k) \text{ dim } E_{\lambda_k} = 1)$$

Ainsi $B = (H_0, \dots, H_N)$ est une Base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.

4) a) soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\|H_k\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(x) \cdot h^{(k)}(x) dx$$

L'pp

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[P_k(x) h^{(k-1)}(x) \right]_y^y - \int_y^y P_k'(x) h^{(k-1)}(x) dx$$

$$u = P_k \quad u' = P_k'$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

$$u = h^{(k-1)}$$

or $P_k(x) h^{(k-1)}(x) = \underbrace{P_k(x) P_{k-1}(x)}_{\text{poly}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi:

$$\|H_k\|^2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} P_k'(x) \cdot P_{k-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= k \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k-1}(x) P_{k-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= k \int_{-\infty}^{+\infty} (H_{k-1}(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= k \|H_{k-1}\|^2$$

b) on a $H_k \neq 0$

$$\text{et } \|H_k\|^2 = k \|H_{k-1}\|^2$$

$$\Rightarrow \prod_{p=1}^k \|H_p\|^2 = \prod_{p=1}^k p \|H_{p-1}\|^2$$

$$\Rightarrow \|H_k\|^2 = k! \|H_0\|^2$$

$$\text{or } \|H_0\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (P_0(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$\Rightarrow \|H_0\| = 1$$

$$\Rightarrow \|H_k\| = \sqrt{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

c) on a $(H_0, H_1, \dots, H_N)$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_N[X])$, alors

$\left(\frac{H_0}{\|H_0\|}, \dots, \frac{H_N}{\|H_N\|} \right)$ est une B.O.N de $\mathbb{R}_N[X]$.

$(H_0; H_1, \dots, \frac{H_N}{\sqrt{N!}})$ " " "

d) a) on a H_{N+1} est un poly unitaire de deg $N+1$, alors

$$\deg H_{N+1} = x^{N+1} \leq N \Rightarrow H_{N+1} x^{N+1} \in \mathbb{R}_N[X]$$

Comme $\left(\frac{H_0}{\|H_0\|}, \dots, \frac{H_N}{\sqrt{N!}} \right)$ est une B.O.N de $\mathbb{R}_N[X]$

$$\begin{aligned}
 \dots > \text{etc.} \quad H_{N+1} - X^{N+1} &= \sum_{k=0}^N \left\langle H_{N+1} - X^{N+1}, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \\
 &= \sum_{k=0}^N \left(\underbrace{\left\langle H_{N+1}, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle}_{=0} - \left\langle X^{N+1}, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle \right) \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \\
 \Rightarrow H_{N+1} &= X^{N+1} - \sum_{k=0}^N \left\langle X^{N+1}, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle \frac{H_k}{\sqrt{k!}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad m &= \min. \int_{-\infty}^{+\infty} (x^{N+1} - p(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad p \in \mathbb{R}_N[x] \\
 &= \min. \left\{ \sqrt{2\pi} \|x^{N+1} - p(x)\|^2; \quad p \in \mathbb{R}_N[x] \right\} \\
 &= \sqrt{2\pi} \left(d(x^{N+1}, \mathbb{R}_N[x]) \right)^2 \\
 &= \sqrt{2\pi} \|x^{N+1} - P_F(x^{N+1})\|^2 \text{ avec } P_F: \text{proj. orth. sur } \mathbb{R}_N[x]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{le minimum est atteint en } P_F(x^{N+1}).$$

$$\text{or } P_F(x^{N+1}) = \sum_{k=0}^N \left\langle x^{N+1}, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle \frac{H_k}{\sqrt{k!}}$$

$$\text{puisque } \left(\frac{H_0}{\sqrt{0!}}, \dots, \frac{H_N}{\sqrt{N!}} \right) \text{ est un B.O.N. de } \mathbb{R}_N[x].$$

$$\Rightarrow x^{N+1} - P_F(x) = H_{N+1} \text{ d'après c)}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{2\pi} \cdot \|H_{N+1}\|^2$$

$$\boxed{m = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{(N+1)!}}$$