

Partie I : Quelques résultats généraux

Q1 – On a : $U_0 = 1$ et donc $L_0 = 1$; $U_1 = X^2 - 1$ et donc $L_1 = X$ et enfin $U_2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et donc : $L_2 = \frac{1}{8}(12X^2 - 4)$ et on retrouve bien $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Q2 – On a en un premier temps $\deg(U_n) = 2n$ et en dérivant $2n$ fois : $\deg(L_n) = n$.

Par ailleurs le terme de plus haut degré de U_n est X^{2n} , donc celui de L_n est $\frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} X^n$ et finalement : $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Q3 – Il résulte de Q2 que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est échelonnée en degrés, donc libre. C'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$: c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4 – On a $U_n = (X-1)^n (X+1)^n$, ce qui montre que les racines de U_n sont -1 et 1 , toutes deux de multiplicité n .

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, 1 et -1 sont racines de multiplicité $n-1$ de U_n' et U_n' se factorise par $(X-1)^{n-1} (X+1)^{n-1}$; comme U_n' est en outre de degré $2n-1 = 2(n-1)+1$, le quotient de U_n' par $(X-1)^{n-1} (X+1)^{n-1}$ est de degré 1 et U_n' peut s'écrire sous la forme $U_n' = \lambda (X-1)^{n-1} (X+1)^{n-1} (X-\alpha)$ où λ et α sont deux réels.

Par ailleurs U_n est de classe C^1 sur $[-1, 1]$ et comme $n \geq 1$: $U_n(1) = U_n(-1) = 0$. De ce fait U_n' s'annule sur $] -1, 1[$ en un réel c . Or on a vu que les racines de U_n' sont 1 , -1 et α . Donc nécessairement $c = \alpha$ et donc $\alpha \in] -1, 1[$.

Q5 – Quitte à réindexer, on peut supposer $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$; on pose en outre $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Comme $n-k \geq 1$, $U_n^{(k)}$ s'annule en -1 et 1 ainsi qu'en chaque α_i pour $i \in [1, k]$. Ainsi pour chaque $i \in [0, k]$: $U_n^{(k)}$ est de classe C^1 (car polynomiale) sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ avec $U_n^{(k)}(\alpha_i) = U_n^{(k)}(\alpha_{i+1})$. Monsieur Rolle nous indique alors l'existence d'un réel $\beta_{i+1} \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_{i+1}) = 0$. L'enchevêtrement $\alpha_0 = -1 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1$ montre que les β_i sont deux à deux distincts et appartiennent à $] -1, 1[$.

En outre, 1 et -1 étant racines de multiplicité $n-k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$, ils sont alors racines de multiplicité $n-k-1$ de $U_n^{(k+1)}$. On a trouvé au total $k+1+2(n-k-1)=2n-k-1$ racines à $U_n^{(k+1)}$ et $\deg(U_n^{(k+1)})=2n-k-1$. Ainsi il existe un réel v tel que :

$$U_n^{(k+1)} = v(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1} \prod_{i=1}^{k+1} (X-\beta_i)$$

Q6 – Notons d'abord que $L_1 = X$ et que la propriété à montrer est vraie pour L_1 : L_1 a une unique racine à savoir 0, qui est bien dans $[-1,1]$.

On suppose désormais $n \geq 2$ et on procède par récurrence finie : on appelle HR_k la propriété supposée à la question Q5.

• D'après la question Q4, HR_1 est vraie.

• D'après la question Q5, si pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ HR_k est vraie, alors HR_{k+1} est vraie.

Alors par récurrence finie : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, HR_k est vraie et en particulier HR_n est vraie. Donc

$U_n^{(n)} = 2^n L_n$ s'écrit sous la forme $U_n^{(n)} = v \prod_{i=1}^n (X-x_i)$ où les x_i sont n réels 2 à 2 distincts dans

$]-1,1[$, ce qui constitue le résultat voulu.

Partie II : Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7 – Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \phi(P + \lambda Q) &= (X^2 - 1)(P'' + \lambda Q'') + 2X(P' + \lambda Q') \\ &= (X^2 - 1)P'' + 2XP' + \lambda[(X^2 - 1)Q'' + 2XQ'] \\ &= \phi(P) + \lambda\phi(Q) \end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire ; par ailleurs, ϕ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ ce qui permet d'affirmer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q8 – Du fait de la linéarité de ϕ , il nous suffit pour prouver que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ de prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a : $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$:

• $\phi(1) = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$.

• Si $n \geq 1$: $\phi(X) = 2X \in \mathbb{R}_n[X]$.

• Si $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\phi(X^k) = k(k-1)(X^2-1)X^{k-2} + 2kX^k = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \in \mathbb{R}_k[X].$$

A fortiori : $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a bien montré $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ et ainsi $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

Q9 – Il résulte des calculs ci-dessus que la matrice de ϕ dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \cdots & (0) \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ (0) & & & \ddots & 0 \\ & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

Et les deux résultats voulus s'en trouvent démontrés.

Q10 – Par suite (matrice triangulaire) le polynôme caractéristique de ϕ_n est $\prod_{k=0}^n (X - k(k+1))$

Le spectre de M et de ϕ_n est donc $\{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Comme la suite $(k(k+1))_{k \in \mathbb{N}}$ est clairement strictement croissante, ces $n+1$ valeurs propres sont 2 à 2 distinctes ; comme en outre $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, ϕ_n est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

Q11 – Pour $k \geq 1$ on a : $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$, donc $(X^2-1)U_k' = 2kX(X^2-1)^k = 2kXU_k$. L'égalité $(X^2-1)U_k' = 2kXU_k$ reste vraie pour $k=0$: les deux membres sont nuls et on a bien pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12 – Avec la formule de Leibniz, en dérivant $k+1$ fois la relation ci-dessus lorsque $k \geq 1$:

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\binom{k+1}{2}U_k^{(k)} - 2kXU_k^{(k+1)} - 2k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

Après rangement on obtient bien :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

Par ailleurs cette relation reste vraie pour $k=0$ (les trois termes du membre de gauche sont nuls) et on a bien le résultat voulu pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q13 – Or $U_k^{(k)} = 2^k k! L_k$, donc la relation ci-dessus s'écrit en la divisant par $2^k k!$:

$$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0$$

Ainsi $\phi_n(L_k) = k(k+1)L_k$. Comme L_k n'est pas nul, on vient de montrer que L_k est vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre $k(k+1)$.

Q14 – Soit λ une valeur propre de ϕ et P un vecteur propre associé. Soit $n = \deg(P)$; ainsi $n \in \mathbb{N}$ car $P \neq 0$ et $\lambda P = \phi(P) = \phi_n(P)$. Or d'après la question Q10, les valeurs propres de ϕ_n sont les $k(k+1)$ pour k décrivant $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc $\text{Sp}(\phi) \subset \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$.

Réciproquement, soit λ un réel de la forme $\lambda = n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$; on sait que λ est alors valeur propre de ϕ_n et donc de ϕ : on vient de montrer que $\text{Sp}(\phi) \subset \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

Toujours pour $\lambda = n(n+1)$, soit P un vecteur propre associé, et $N = \max(n, \deg(P))$. Alors $P \in \ker(\phi_N - n(n+1)\text{Id}_{\mathbb{R}_N[X]})$ et on a vu à la question Q10 que $\ker(\phi_N - n(n+1)\text{Id}_{\mathbb{R}_N[X]})$ est

une droite, qui contient L_n d'après Q13. Donc $P \in \text{Vect}(L_n)$ la réciproque étant immédiate. Donc le sous-espace propre associé à $n(n+1)$ est $\text{Vect}(L_n)$.

Partie III : Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15 – Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a clairement : $\langle P + \lambda Q | R \rangle = \langle P | R \rangle + \lambda \langle Q | R \rangle$, $\langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle$ et $\langle P | P \rangle \geq 0$.

De plus, si $\langle P | P \rangle = 0$, alors $\int_{-1}^1 P^2(x) dx = 0$, et P^2 est une fonction positive et continue sur $[-1, 1]$. Donc $\forall x \in [-1, 1], P^2(x) = 0$ et le polynôme P s'annule une infinité de fois. Donc $P = 0$.
Il résulte de tous ces points que $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q16 – Partons du membre de gauche et réalisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt &= \left[-(t^2 - 1) P'(t) Q(t) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (2t P'(t) + (t^2 - 1) P''(t)) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \phi(P)(t) Q(t) dt \end{aligned}$$

En d'autres termes : $\langle \phi(P) | Q \rangle = -\int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt$.

En échangeant les rôles de P et de Q on a également : $\langle \phi(Q) | P \rangle = -\int_{-1}^1 (t^2 - 1) Q'(t) P'(t) dt$ et par commutativité du produit : $\langle \phi(P) | Q \rangle = \langle \phi(Q) | P \rangle$.

Q17 - Soit n et m deux entiers naturels distincts. Alors :

$$n(n+1) \langle L_n | L_m \rangle = \langle \phi(L_n) | L_m \rangle = \langle L_n | \phi(L_m) \rangle = m(m+1) \langle L_n | L_m \rangle$$

Or $n(n+1) \neq m(m+1)$ donc $\langle L_n | L_m \rangle = 0$. La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien orthogonale.

Q18 – Pour $n \geq 1$, on a vu à la question Q3 que $(L_0, \dots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ or il résulte de la question Q17 que L_n est orthogonal à chacun des vecteurs de cette base. Donc L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P | L_n \rangle = 0$.

Q19 – On a $Q_n = \frac{L_n}{\|L_n\|}$ et la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale, donc $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale.

Q20 – $\mathbb{R}_n[X]$ étant un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$, le projeté orthogonal T_n de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ est bien défini et est l'unique vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = d(P, T_n)$. $\|P\|^2 = \sum_{k=0}^n (\langle P | Q_k \rangle)^2 + \|P - T_n\|^2$