

Problème Adjoint d'une endo.

Partie I:

$U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire.

Def. Puisque B_n et B_p sont des

BOIV $\langle Ux, y \rangle_p = {}^t(Bx) \cdot {}^t(B \cdot y)$
 $= {}^t x \cdot {}^t B \cdot y$

avec $U^*: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\text{Mat}(U^*, B_p, B_n) = {}^t B$

unicité:

Supposons qu'il existe $U: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire

tg. $\langle U(x), y \rangle_p = \langle x, U(y) \rangle_n, \forall x, \forall y$
 $\parallel$
 $\langle x, U^*(y) \rangle_n$
 $\Rightarrow$

$\langle x, (U^* - 0)(y) \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow (U^* - 0)(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^p$
 $\Rightarrow U^* = 0$

b) $\text{Mat}((U^*)^*; B_n, B_p) = {}^t({}^t B) = B$
 $= \text{Mat}(U, B_n, B_p)$
 $\Rightarrow U = (U^*)^*$

ou bien: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^p$
 $\langle U^*(y), x \rangle_n = \langle y, (U^*)^*(x) \rangle_p$
 $\langle U(x), y \rangle_p = \langle (U^*)^*(x), y \rangle_p, \forall x, \forall y$
 $\Rightarrow (U^*)^*(x) = U(x), \forall x$
 $\Rightarrow (U^*)^* = U$

$$* \text{ Mg. } \sin n = p. \Rightarrow (p(u))^* = p(u^*)$$

$$\text{Soit } p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k. \Rightarrow p(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k.$$

$$\text{Nat}(u, B_1) = B \Rightarrow \text{Nat}(p(u), B_1) = p(B).$$

$$\Rightarrow \text{Nat}((p(u))^*, B) = {}^t(p(B)) = p({}^tB).$$

$$\text{Nat}(p(u^*), B)$$

$$\Rightarrow p(u^*) = (p(u))^*.$$

exercice

$$\bullet (\alpha u + v)^* = \alpha u^* + v^*.$$

$$\bullet \text{then } (u^n)^* = (u^*)^n. \text{ (recurrence)}$$

$$\bullet p(u^*) = (p(u))^*.$$

$$2) \forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} \langle U^* \circ U(x), y \rangle &= \langle U(x), (U^*)^*(y) \rangle \\ &= \langle U(x), U(y) \rangle \\ &= \langle x, U^* U(y) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow U \circ U$ est une endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$.
Donc c'est diagonalisable dans $\mathbb{R}^n$.
BOIV.

• Soit $\lambda \in \text{Sp}(U^* \circ U) \subset \mathbb{R}$.
 $\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq. $(U^* \circ U)(x) = \lambda x$.

$$\begin{aligned} \langle U^* \circ U(x), x \rangle_n &= \langle U(x), U(x) \rangle_p \\ \lambda \|x\|_n^2 &= \|U(x)\|_p^2 \Rightarrow \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

• On a $\ker U \subset \ker(U^* \circ U)$.
Soit $x \in \ker(U^* \circ U) \Leftrightarrow U^* U(x) = 0$

$$\Rightarrow \|U(x)\|_p^2 = \langle U(x), U(x) \rangle_p = 0$$

$$= \langle x, U^* U(x) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|U(x)\| = 0 \Rightarrow U(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker U. \Rightarrow \ker U = \ker U^* \circ U.$$

$$\begin{aligned} 4) \lambda \neq 0; x \neq 0; U^* \circ U(x) &= \lambda x. \\ U \circ U^*(U(x)) &= U(\lambda x) \\ &= \lambda U(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Supp qd. } U(x) &= 0 \Rightarrow (U^* \circ U(x)) = \lambda x \\ &\Rightarrow \lambda x = 0 \text{ abs. car } \lambda \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \\ &\Rightarrow U(x) \neq 0 \Rightarrow \|U(x)\|_p^2 > 0 \text{ et } U(x) \text{ est orthogonal à } \ker U. \end{aligned}$$

b) $\lambda \neq 0$; $\forall v_i \in \ker(U^* \circ U)$.
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; $\forall v_i \in \ker(U^* \circ U)$ on a $U(v_i) \perp \ker(U^* \circ U)$.
 $\Rightarrow \{U(v_1), \dots, U(v_m)\} \subset \ker(U^* \circ U)^\perp$.

Soit $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^m d_i U(v_i) = 0$
 $\Rightarrow U^* \left(\sum_{i=1}^m d_i v_i \right) = 0$

$\parallel$
 $\sum_{i=1}^m d_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m d_i v_i = 0$

0. $\Rightarrow \forall (1 \leq i \leq m, d_i = 0)$ car $(v_1, \dots, v_m)$ libre.
 Ici $(U(v_1), \dots, U(v_m))$ est libre. donc $\ker(U \circ U^* - d \cdot \text{id}_p) = \{0\}$.

b) On a. $U^* \circ U$ est drag $\Rightarrow \dim \ker(U^* \circ U - d \cdot \text{id}_n) = \text{mult}(d)$.
 $U \circ U^* \parallel \Rightarrow \dim \ker(U \circ U^* - d \cdot \text{id}_n) = \text{mult}(d)$

Soit $(v_1, \dots, v_m)$ base de $\ker(U^* \circ U - d \cdot \text{id}_n)$
 $\Rightarrow (U(v_1), \dots, U(v_m))$ libre. donc $\ker(U \circ U^* - d \cdot \text{id}_p)$

$\Rightarrow \dim \ker(U \circ U^* - d \cdot \text{id}_p) \geq m = \dim \ker(U^* \circ U - d \cdot \text{id}_n)$
 on a toujours $\dim(\ker(U \circ U^* - d \cdot \text{id}_p)) \leq \dim \ker(U^* \circ U - d \cdot \text{id}_n)$

$$\Rightarrow \dim \ker(U \circ U^* - \lambda \text{Id}_p) = \dim \ker(U \circ U - d \text{Id}_p) = \text{mul}(d)$$

$$c) \text{ On a } \ker U^* \circ U = \ker U$$

$$\text{Th du rang} \Rightarrow \text{rg}(U^* \circ U) = \text{rg}(U)$$

$$\text{On remplace } U \text{ par } U^* \Rightarrow \text{rg}(U \circ U^*) = \text{rg}(U^*)$$

$$= \text{rg}(E_B)$$

$$= \text{rg}(0)$$

$$= \text{rg}(0)$$

$$\Rightarrow \text{rg}(U \circ U^*) = \text{rg}(U^* \circ U) = \text{rg}(0)$$

Autrement:

On a. $U^* \circ U$ et $U \circ U^*$ sont diagonalisables

$$\mathbb{R}^n$$

$$= E_0(U^* \circ U) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} E_\lambda(U^* \circ U)$$

$$\mathbb{R}^p$$

$$= E_0(U \circ U^*) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} E_\lambda(U \circ U^*)$$

$$\begin{aligned} \text{rg}(U^* \circ U) &= n - \dim \ker(U^* \circ U) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 0}}^p \text{mul}(d_i) \\ &= p - \dim \ker(U \circ U^*) \\ &= \text{rg}(U \circ U^*) \end{aligned}$$

$$d) n \geq p$$

$U^* \circ U$ et $U \circ U^*$ sont diagonalisables
 $\Rightarrow$ leurs poly caractéristiques sont les mêmes

$$\forall d \neq 0, d \text{ racine de } \chi_{E_B} \Leftrightarrow d \text{ " de } \chi_{B \circ B}$$

$$\Rightarrow \chi_{E_B}(x) = x^{n-\sum_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \text{mul}(\lambda)} \prod_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} (x - \lambda)^{\text{mul}(\lambda)}$$

$$\chi_{B \circ B}(x) = x^{p-\sum_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \text{mul}(\lambda)} \prod_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} (x - \lambda)^{\text{mul}(\lambda)}$$

$$\Rightarrow X_{\in BB} (x) = X^{n-p} X_{B^c B} (x).$$

$$5) x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \neq 0 \text{ et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$a) \text{ on a } x^t x = (x_i x_j)$$

$$\Rightarrow \forall k, j \leq n, C_j = x_j x \text{ et } x \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(x \cdot x) = 1.$$

ou bien soit $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\text{Mat}(\psi, B_1, B_n) = X$.

$$\text{rg}(\psi \circ \psi^*) = \text{rg}(\psi^* \circ \psi) \Rightarrow \text{rg}(x^t x) = \text{rg}\left(\frac{x \cdot x}{\|x\|^2}\right) = 1.$$

b) on a $x^t x$ est symétrique $\Rightarrow$ diagonalisable $\Rightarrow \exists P \in O_n(\mathbb{R})$ par

$$x^t x = {}^t P \text{diag}(d_1, \dots, d_n) P.$$

$$\Rightarrow \text{rg}(x^t x) = \text{rg}({}^t P \text{diag}(d_1, \dots, d_n) P) = \text{rg}(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = ?$$

$$\Rightarrow \exists d_i \neq 0 \text{ (au plus } d_1 \neq 0) \text{ et } d_2 = d_3 = \dots = d_n = 0$$

et on a. $\text{tr}(X^t X) = \text{tr}(\epsilon_P \text{diag}(1, \dots, 0) P)$
 $\parallel$ $= \text{tr}(\text{diag}(1, 0, \dots, 0)) = 1$
 $\parallel X \parallel^2 = 1$
 $\Rightarrow X^t X = \epsilon_P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P.$

exer 1: $\text{rg}(X^t X) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(X^t X)) = n-1$
 et on a $X^t X$ est diag $\Rightarrow \sup \text{val } X^t X$
 et $\mu_1(0) = n-1$
 $\lambda \neq 0 \rightarrow \lambda = \text{tr}(X^t X)$

c) $\parallel X \parallel_n = 2$; $A = I_n - 2X^t X$
 $\bullet A \cdot A = (I_n - 2X^t X)(I_n - 2X^t X)$
 $= I_n - 4X^t X + 4X^t X^t X = I_n$
 $\Rightarrow A$ est orthogonal.
 $\bullet A^2 = I_n \Rightarrow A$ est antisymétrique.

$AX = X - 2X^t X \cdot X$
 $= -X$
 $\Rightarrow \forall Z \in \text{vect}(X)$
 $AZ = -Z$
 $\Rightarrow \text{vect}(X) = \ker(A + I_n)$
 $\bullet \text{soit } Y \in (\text{vect}(X))^\perp \Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow X^t Y = 0$
 $\bullet AY = Y - 2X^t X \cdot Y = Y$
 $\Rightarrow (\text{vect}(X))^\perp \subset \ker(A - I_n)$
 $\Rightarrow \dim \ker(A - I_n) = \begin{cases} n \\ n-1 \end{cases} \sup A \neq I_n$
 $\Rightarrow \ker(A - I_n) = (\text{vect}(X))^\perp$
 $\Rightarrow A$ est une symétrie orthogonale.

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

$$B^t B =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$${}^t B B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

4) g.v.p. de ${}^t B B$ et $\text{mul}(g) = 2$.

$\Rightarrow$ " " $B^t B$ " " "

est o.v.p. simpl. de $B^t B$.

$\Rightarrow B^t B$ est semblable à

7) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq p$.

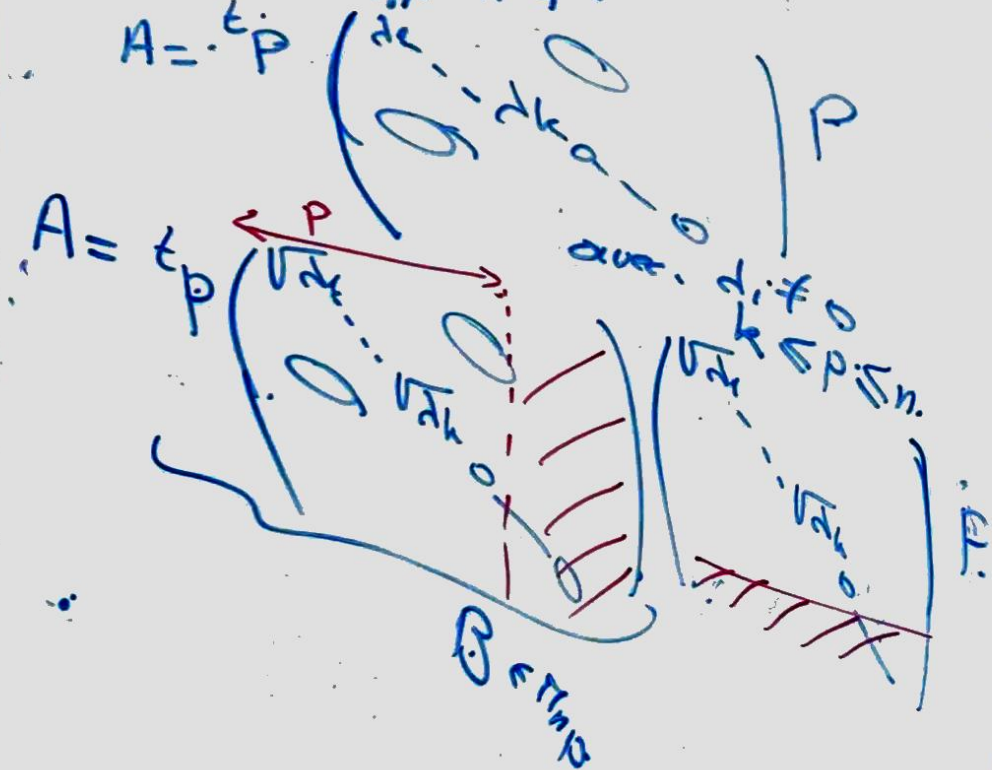
8) $\Rightarrow$ 6^e hyp $\exists B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $A = B^t B$

D'après 4) c. $\text{rg}(A) = \text{rg}(B^t B) = \text{rg}(B) \leq p$.

D'après 2/ les vp. de $U^* \circ U$ sont $\oplus$
 // $B^t B$

well, $\exists p \in O_n(\mathbb{R})$ s.t. A is symmetric?

$$A = \dot{\epsilon} \dot{P}$$



Pointe. II

3) $U \circ U^* = U^* \circ U$

$$\Rightarrow P(U) \circ P(U^*) = P(U^*) \circ P(U)$$

$$p(u) \circ (p(u))^* = (p(u))^* \circ p(u)$$

$\Rightarrow P(U)$ endo normal.

c.) $\forall x \in E;$

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle$$

$$= \langle x, U^* U(x) \rangle$$

$$= \langle x, U_0^*(x) \rangle$$

$$\langle U(x), U^*(x) \rangle = \|U^*(x)\|^2$$

* D'après T-31.

$$k_{\pi_1} U = k_{\pi_2} U \circ U.$$

$$\Rightarrow \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$$

* Prop $\ker U = \ker U^e$

ma. $\ker U \subset \ker U^e$

" $\supset$ " Soit $x \in \ker U^e \Rightarrow U^e(x) = 0$

$$\|U^*(U(x))\| = \|U^e(x)\| = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(U^* \circ U) = \ker U$$

$$\Rightarrow U(x) = 0 \Rightarrow \ker U^e \subset \ker U$$

$$\Rightarrow \ker U = \ker U^e$$

Par récurrence. $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ker U^m = \ker U$

d) Si U est normal et nilpotent.

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } U^k = 0 \Rightarrow \ker U^k = E$$

$(U_{\text{normal}}) \xrightarrow{\text{d.l.}} \ker U$

$$\Rightarrow U = 0.$$