

Remarque:

$p \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) P projecteur orthogonal.
- 2) $p \circ p = p$ et $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$
- 3) $p \circ p = p$ et p pseudo symétrique.
- 4) $p \circ p = p$ et $\|p(x)\| \leq \|x\|$

En effet, (4) $\Rightarrow$ (2)

Soit $x \in \text{Im } p$ et $y \in \text{Ker } p$

Soit $z = x + ty$

$\Rightarrow p(z) = x$

et $\|p(z)\| \leq \|z\|$

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x, y \rangle \geq 0$$

$$\forall t > 0 \Rightarrow t \|y\|^2 \geq -\langle x, y \rangle$$

$$\forall t < 0 \Rightarrow t \|y\|^2 \leq -\langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \Rightarrow \langle x, y \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Proble : "Projection orthogonale".
 $p(e_1) \ p(e_2) \ p(e_3) \ p(e_4)$

Partie I,

on a $\pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$p \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Mat}(p, B_C) = \pi$.

$\Rightarrow \pi^2 = \pi \Rightarrow p \circ p = p$

$\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_C = \underline{\text{BON}} \subset \mathbb{R}^4$

et on a $\pi = \pi \Rightarrow p$ endomorphisme.

b) $\text{Im } p = \text{vect}(p(e_1), p(e_2))$
 $= \text{vect}(u_1, u_2)$
 avec $u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 et on a $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$

$\Rightarrow (u_1, u_2) \text{ BON}$
 $\Rightarrow \text{Im } p$

on vérifie q. $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } p$
 et $\|u_3\| = \|u_4\| = 1$.

Donc $(u_3, u_4) \text{ BON} \perp \text{Im } p$

c) $r: F \rightarrow K$ projection orthogonale.

$d \neq 0$ et $u \neq 0 \in F$ et $(p \circ r)(u) = d u$.

$\Rightarrow u = \frac{1}{d} (p \circ r)(u) = \frac{1}{d} p(r(u))$

Or p : projection orthogonale sur H
 $\Rightarrow p(r(u)) \in H \Rightarrow u \in H$

* On a $p(r(u) - d u) =$
 $p(r(u)) - d p(u) =$
 $p(r(u)) - d u$ car $u \in H \Rightarrow p(u) = u$
 $= 0$

$$b) u \in H \text{ et } r(u) - du \in H^\perp.$$

$$\Rightarrow \langle u, r(u) - du \rangle = 0$$

$$\Rightarrow d \langle u, u \rangle = \langle u, r(u) \rangle$$

$$d \|u\|^2 = \langle \underbrace{u-r(u)}_{\in H^\perp} + \underbrace{r(u)}_{\in K}, \underbrace{r(u)}_{\in K} \rangle = \|r(u)\|^2$$

on bien

$$\langle u, r(u) \rangle = \langle u, r^2(u) \rangle$$

$$= \langle r(u), r(u) \rangle$$

$$= \|r(u)\|^2 \Rightarrow d \geq 0.$$

$$c) \text{ on a } \|r(u)\|^2 = d \|u\|^2 \Rightarrow d \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq d \leq 1.$$

$$\text{Donc } d \text{ v. p. } \text{por}, d \in [0, 1]$$

$$1) \text{ por} = \text{por}^2$$

$$a) \text{ on a } (\text{por})^2 = \text{por} \circ \text{por} = \text{por}^2 \circ \text{por} = \text{por}.$$

$$\Rightarrow \text{por} : \text{projecteur @}$$

$$\text{Soit } x, y \in E.$$

$$\langle \text{por}(x), y \rangle = \langle r(x), p(y) \rangle \quad (p \text{ sym}) \\ = \langle x, r(p(y)) \rangle \quad (r \text{ sy}) \\ = \langle x, \text{por}(y) \rangle.$$

$$\Rightarrow \text{por} \text{ endo symétrique @}$$

$$b) \text{ por} \neq \text{id}.$$

$$\text{on a } q^2 = q \Leftrightarrow q^2 - q = 0.$$

$$\Rightarrow H(x) = x^2 - x \text{ poly annulateur de } q.$$

$$\pi_q(x) = x$$

$$\pi_q(x) = x_1$$

$$\pi_q(x) = x(x-1)$$

$$\bullet \text{ or } q \neq 0 \Rightarrow T_q(x) \neq x.$$

$$\bullet \text{ sup } q = \text{por} = \text{id}_E.$$

$$\Leftrightarrow (\text{por})(x) = x \quad \forall x \in E.$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\text{por}) = F.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a. } \text{Im}(\text{por}) \subset \text{Imp} = H \neq F \\ \text{abs. } (H \subset F) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow q \neq \text{id}_E \Rightarrow T_q(x) \neq (x, 1)$$

$$\text{Ainsi: } T_q(x) = x(x-1) \Rightarrow \text{Sp}(q) = \{0, 1\}$$

$$\text{c) } T_q. \text{ker}(\text{por}) = \text{ker } p + \text{ker } n.$$

$$\text{ona. } \text{ker } p \subset \text{ker}(\text{por}) \Rightarrow \text{ker } p + \text{ker } n \subset \text{ker}(\text{por}).$$

$$\text{" } \Rightarrow \text{ Soit } x \in \text{ker}(\text{por}) \Leftrightarrow \text{por}(x) = 0 \Rightarrow p(n(x)) = 0 \Rightarrow n(x) \in \text{ker } p$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{x - n(x)}_{\in \text{ker } n} + \underbrace{n(x)}_{\in \text{ker } p}$$

$$\Rightarrow \text{ker}(\text{por}) = \text{ker } p + \text{ker } n.$$

$\star$ $\text{Im}(p \circ r) \subset \text{Im } p$
 $\text{Im}(r \circ p) \subset \text{Im } r$
 $\Rightarrow \text{Im}(p \circ r) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } r$
 " soit $y \in \text{Im } p \cap \text{Im } r$
 $\Rightarrow y = r(x_1)$ et $y = p(x_2)$
 $\Rightarrow (p \circ r)(y) = p(r(y))$
 $= p(r^2(x_1))$
 $= p \circ r(x_1)$
 $= p(y) = p^2(x_2)$
 $= p(x_2) = y$
Conclusion : on a $p(y) = y$ et $r(y) = y$.
 $(p \circ r)(y) = p(r(y))$
 $= p(y) = y$
 $\Rightarrow y \in \text{Im}(p \circ r)$

2) on a p et r projecteurs orthogonaux.
 $\perp$
 $\Rightarrow F: \text{ker } p \oplus \text{Im } p$
 $\Rightarrow \exists B = (B_1, B_2)$ avec B_1 BON de $\text{Im } p$
 B_2 " de $\text{ker } p$
 $\Rightarrow B$ BON de F .
 et $\text{Mat}(p, B) = \underset{\text{rang } p}{h} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow R = \text{Mat}(r, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
 a) on a. $r \circ p = p$ $\Rightarrow R = R$
 $\Rightarrow R^2 = R$
 $A^2 + BC = A$; $AB + BD = B$
 $CB + DC = C$; $D^2 = D$ et $A = A$; $B = C$; $D = D$
 b) a) $\Rightarrow$ iii).
 on a. $C.C = 0_n$
 $\Rightarrow h \begin{pmatrix} x \\ C.C \end{pmatrix} = 0_n \Rightarrow \sum_{i,j=1}^h C_{ij}^2 = 0$

$$\Rightarrow \forall i, j \quad C_{ij}^2 = 0, \quad C_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow C = 0_n.$$

$$\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)} \text{ on a } C=0 \Rightarrow B=0$$

$$\Rightarrow R.P. = P.R \Rightarrow por = rop$$

$$\text{iv)} \Rightarrow \text{i)} \text{ d'après ?/}$$

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)} \text{ hyp } Sp(por) \subset \{0, 1\}$$

$$\text{on a } PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) \text{ divise } \chi_{PR}(x)$$

$$\Rightarrow \underline{Sp(A)} \subset \underline{Sp(por)} \subset \{0, 1\}$$

$$\text{De plus on a } A=A \Rightarrow A \text{ est symétrique}$$

$$\text{reel } \Rightarrow A \text{ est diagonalisable}$$

$$\Rightarrow \exists P \in O(n) \text{ t. } A = P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_k) \cdot P$$

$$\text{on a } d_i \in \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow A = P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_k) \cdot P$$

$$= A$$

$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow BC=0 \Rightarrow C.C=0$$

Partie II :

$f: E \rightarrow F$ linéaire

P : proj orthogonal sur $\text{Im} f$.

$$1) \min_{x \in E} \|f(x) - v\|, x \in E$$

$$= d(v, \text{Im} f)$$

$$= \|v - p(v)\|$$

$$2) p(v) \in \text{Im} f \Rightarrow \exists x_0 \in E \text{ s.t.}$$

$$p(v) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \min_{x \in E} \|f(x) - v\|, x \in E$$

$$= \|v - f(x_0)\|$$

$$x_0 : \text{pseudo-solution de } f(x) = v \Leftrightarrow p(v) = f(x_0)$$

2) Soit x_0 et x_1 deux pseudo-solutions de $(*)$.

$$\Leftrightarrow p(v) = f(x_0) \text{ et } p(v) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(x_1) \xrightarrow{f \text{ inj}} x_1 = x_0$$

3) " $\Rightarrow$ " x_0 pseudo-solution de $(*)$.

$$\Rightarrow f(x_0) = p(v)$$

$$\Rightarrow p(v) - v = f(x_0) - v \in (\text{Im} f)^\perp$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, f(x) \in \text{Im} f \Rightarrow \langle f(x), f(x_0) - v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hyp} \quad \langle f(x), f(x_0) - v \rangle = 0, \forall x \in E$$

$$\text{ona } v = \underbrace{v - f(x_0)}_{\in (\text{Im} f)^\perp} + \underbrace{f(x_0)}_{\in \text{Im} f} \Rightarrow p(v) = f(x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle f(x_0) - v, y \rangle = 0, \forall y \in \text{Im} f \\ \Rightarrow f(x_0) - v \in (\text{Im} f)^\perp \end{array} \right\}$$

① $O_n(\mathbb{R})$. n'est pas connexe par arcs

② $O_2^+(\mathbb{R})$. connexe par arcs

→ Supposons $Q_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs

$$\det(O_n(\mathbb{R})) \subset \{-1, 1\}$$

$$\det(I_n) = 1 \text{ et } \det \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$\uparrow$
 $\in O_n(\mathbb{R})$

$\uparrow$
 $\in O_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$$

et $\det$ est continu sur $O_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \{-1, 1\}$ connexe par arcs $\neq \mathbb{R}$.

alors ces deux cas sont possibles

③ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$

$$t \mapsto f(t) = R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

continu

$\mathbb{R}$ connexe par arcs

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \text{connexe par arcs} \text{ — } \mathbb{R}_2(\mathbb{R})$$

$\parallel$
 $O_2^+(\mathbb{R})$

→ Matrices Orthogonales.

* $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A \cdot A = I_n$

$\Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$

$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

$O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$

* $n=2$

$A \in O_2^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ s.t.}$

$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$O_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Exemple

" $\Leftarrow$ " soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^t A A = I_2 \\ \det A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$

ona. $a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ s.t.}$
 $a = \cos \theta$ et $c = \sin \theta$

$(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + d^2 - 2ad + b^2 + c^2 + 2bc$
 $= 2 + 2(bc - ad) = 0$

$\Rightarrow a-d=0$ et $b+c=0$
 $\Rightarrow a=d$ et $b=-c$

$$\begin{aligned}
 & \text{c) } V = \text{Rat}(0, B') \\
 & X_0 = \text{Rat}(x_0, B) \\
 & A = \text{Rat}(f, B, B')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } f(x) = AX \text{ avec } x = \text{Rat}(x, B) \\
 & f(x_0) - V = AX_0 - V
 \end{aligned}$$

$$\text{Définir } \langle x \rangle = \langle f(x), f(x_0) - V \rangle = 0$$

$$\langle AX, (AX_0 - V) \rangle = \langle x, {}^t A (AX_0 - V) \rangle = 0$$

$$\text{b) } x_0 \text{ pseudo solution de } (*) \Leftrightarrow \langle f(x), f(x_0) - V \rangle = 0, \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow \langle x, {}^t A (AX_0 - V) \rangle = 0, \forall x \in \Pi_{n_2}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \langle {}^t A AX_0 - {}^t A V, x \rangle = 0 \text{ avec } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ produit scalaire canonique sur } \Pi_{n_2}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow {}^t A AX_0 - {}^t A V \in (\Pi_{n_2}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$$

$$\langle x, y \rangle = 0, \forall x \Rightarrow y = 0$$

$$x=y \Rightarrow \langle y, y \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_i = 0 \Rightarrow y = 0$$

$\forall A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$, alors
 $\forall i, j, |a_{ij}| \leq 1$

Effet on a. $E_A \cdot A = I_n$.

Kiel on $\sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 = 1$

$\Rightarrow \forall i, \forall j, (a_{ij})^2 \leq 1$
 $\Leftrightarrow |a_{ij}| \leq 1$

$\rightarrow U \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal

$\Rightarrow \|U(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$

$\Leftrightarrow \langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E$

on note $O(E) = \{ U \in \mathcal{L}(E) \mid U \text{ orthogonal} \}$

$O(E)$ est compact de $(GL(E), 0)$

$\forall U \in O(E)$, U est bijective.

$\forall U, V \in O(E), UV \in O(E)$

$\forall U \in O(E) \Rightarrow U' \in O(E)$

$\rightarrow$ Si $B = B \circ U \perp E$

U endomorphisme orthogonal

$\Leftrightarrow \text{Mat}(U, B)$ est une matrice orthogonale

Soit $\varphi: \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$

$U \mapsto \varphi(U) = \text{Mat}(U, B)$

φ est un isomorphisme de $O(E)$ sur $O(n, \mathbb{R})$

$\varphi(O(E)) = O_n(\mathbb{R})$
 $\varphi^{-1}(O_n(\mathbb{R})) = O(E) \in \varphi(O_n(\mathbb{R})) = O(E)$
 φ^{-1} est linéaire et $\varphi^{-1} \rightarrow \varphi$
 φ^{-1} continue
 et $O_n(\mathbb{R})$ compact de $M_n(\mathbb{R})$
 Alors $\varphi(O_n(\mathbb{R})) = O(E)$ compact de $\mathcal{L}(E)$

$\rightarrow U \in O(E) \Rightarrow \text{Sp}(U) \subset \{-1, 1\}$
 $\rightarrow F$ se- U de E .
 F stable par $U \Leftrightarrow F^\perp$ stable par U
 $\Rightarrow$ soit $x \in F^\perp$, mg. $U(x) \in F^\perp$
 $\forall y \in F, \langle U(x), y \rangle = 0$

F stable par $U \Rightarrow U|_F : F \rightarrow F$ injectif
 $U|_F$ bijectif $\Rightarrow$ bijectif

$\Rightarrow \exists x' \in F$ tq $y = U(x')$
 $\Rightarrow \langle U(x), y \rangle =$
 $\langle U(x), U(x') \rangle$

$$= \langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{x'}_{\in F} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow U(x) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow U(F^\perp) \subset F^\perp$$