

$$\rightarrow B = (e_1 \dots e_n) \text{ B.O.V.}$$

$$U(B) = (U(e_1) \dots U(e_n)) \text{ B.O.V.}$$

$$\text{Mat}(U, B) = P \begin{matrix} B \rightarrow U(B) \\ \uparrow \\ \text{B.O.V.} \end{matrix} \in O_n(K)$$

$\rightarrow \Delta_F$: Symétrique orthogonale $\Rightarrow \Delta_F \in O(E)$

$$\forall x \in E = F \oplus F^\perp \Rightarrow x = x_F + x_{F^\perp}$$

$$\|\Delta_F(x)\|^2 = \|x_F - x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$$

$$= \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$$

$$= \|x_F + x_{F^\perp}\|^2 = \|x\|^2$$

$\Rightarrow \Delta_F$ est orthogonale.

De plus, on a Δ_F est endo symétrique.

$$\|\Delta_F(x)\|^2 = \langle \Delta_F(x), \Delta_F(x) \rangle$$

$$= \langle x, \Delta_F^2(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$$\rightarrow S(E|NO(E)) = \{ \Delta : \Delta \text{ est une symétrique orthogonale} \}$$

" $\supset$ " vrai

" $\subset$ " soit $\Delta \in S(E|NO(E))$

et $B = \text{B.O.V.}$ de E : $A = \text{Mat}(\Delta, B)$

$$\Rightarrow A = A^t \text{ et } A \cdot A = I_n \Rightarrow A^2 = I_n$$

$$\Rightarrow \Delta^2 = \text{id}_E \Rightarrow \Delta \text{ est une symétrique.}$$

• Rq. $\ker(\Delta - \text{id}_E) \perp \ker(\Delta + \text{id}_E)$.

Soit $x \in \ker(\Delta - \text{id}_E)$ et $y \in \ker(\Delta + \text{id}_E)$.

$$\Delta(x) = x \text{ et } \Delta(y) = -y$$

$$\langle x, y \rangle = -\langle \Delta(x), \Delta(y) \rangle = -\langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$\forall x \in E, \|U(x)\| = \|x\|$

$\{ \text{Mat}(U, B) = \text{orthogonal} \} \iff \begin{cases} \text{Sp}(U) \subset \{-1, 1\} \\ \det U \in \{-1, 1\} \end{cases}$
 $\nwarrow$ BOV.

$\forall x, y \in E$
 $\langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\forall B = (e_1, \dots, e_n)$ BOV
 $\Rightarrow U(B) = (U(e_1), \dots, U(e_n))$ BOV

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
 $\Downarrow$ un endo orthogonal.
 $\Downarrow$ isométrie vectorielle

F un n.e.v stable par U
 $\cdot U_F: F \rightarrow F$ endo euclidien
 $\Rightarrow U_F$ est orthogonal.
 $\nwarrow$ F de v. stable par U
 $\nwarrow$ F de v. stable par U

$\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ BOV s.t.
 $U(B) = (U(e_1), \dots, U(e_n))$ BOV
 $\Rightarrow U = \text{orthogonal}$

$\Rightarrow F$: symétrie orthogonale.
 $\Rightarrow$ endo orthogonal.

$O(E) = \{ U \in \mathcal{L}(E) \mid U \text{ orthogonal} \}$
 $(O(E), \circ)$ est un gr. de $\mathcal{L}(E)$
 $\cdot U \in O(E)$
 $\cdot U \in O(E) \Rightarrow U^{-1} \in O(E)$
 $\cdot U, V \in O(E) \Rightarrow UV \in O(E)$

$\varphi: (O(E), \circ) \rightarrow (O_n(\mathbb{R}), \cdot)$
 $U \mapsto \text{Mat}(U, B)$
 isomorphisme de groupes

$\Rightarrow U \in O(E)$; F stable par $U \Leftrightarrow F^\perp$ stable par U

" $\Rightarrow$ " soit $x \in F^\perp$; on a $U(x) \in F^\perp$.

soit $y \in F$; ??

$$\langle U(x), y \rangle = 0$$

ona. $U(F) \subset F$.

$U_F: F \rightarrow F$ orthogonal $\Rightarrow$ bij.

$\forall y \in F \Rightarrow \exists x' \in F$ tel $y = U(x')$

$$\Rightarrow \langle U(x), y \rangle = \langle U(x), U(x') \rangle$$

$$\Rightarrow U(F^\perp) \subset F^\perp$$

* $U \in O(E)$; $F \cap O \neq \emptyset$.

$$U(F^\perp) = (U(F))^\perp$$

" $\Leftarrow$ " soit $y \in U(F^\perp) \Rightarrow \exists x \in F^\perp$ tel $y = U(x)$.

soit $z \in U(F) \Rightarrow z = U(x')$, $x' \in F$.

$$\langle y, z \rangle = \langle U(x), U(x') \rangle$$

$$= \langle x, x' \rangle = 0$$

$\Rightarrow U(F^\perp) \subset U(F)^\perp$

D'autre part:

$$\dim U(F^\perp) = \dim F^\perp \quad (U \text{ bij.})$$

$$= \dim E - \dim F$$

$$= \dim E - \dim (U(F))$$

$$= \dim (U(F))^\perp$$

$$\text{Donc } U(F^\perp) = (U(F))^\perp$$

Partie II.

$$O_2^+(\mathbb{R}) = \{ A \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

$$= \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$O_2^+(\mathbb{R})$ s.g. commutatif compact et connexe par arcs.

* Soit $A \in O_2^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \theta$ t.q. $A = R_\theta$.

$B \in O_2^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \theta'$ t.q. $B = R_{\theta'}$

$$A \cdot B = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = B \cdot A$$

* $O_2^+(\mathbb{R}) \subset O_2(\mathbb{R}) = \text{compact}$
 $\det$ est continue car
 $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \det^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $O_2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow O_2^+(\mathbb{R}) = \underbrace{O_2(\mathbb{R})}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{\det^{-1}(\{1\})}_{\text{fermé}}$$

$\Rightarrow O_2^+(\mathbb{R})$ est un fermé $\subset$ Compact.

$\Rightarrow O_2^+(\mathbb{R})$ est un Compact.

2) $U \in \mathcal{L}(E)$

a) $\text{Sp}(U) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \text{Sp}(U)$

$\Rightarrow \exists x \neq 0 \in E$ t.q. $U(x) = \lambda x$.

Soit $D = \text{vect}(\{x\}) \Rightarrow D$ est stable par U

b) $\text{Sp}(U) = \emptyset$: $\Pi_U(x) = p_1 \cdots p_r$
 avec $\deg p_k = 2$ et $\Delta \neq 0$

* Justifions que $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \text{Sp}(p_k)$ et $p_k(0) \neq 0$.
 Supp $\exists k_0 \in \{1, \dots, r\}$ t.q. $k_0 \in \text{Sp}(p_{k_0}(U)) = \{0\}$
 $\Rightarrow p_{k_0}(U)$ est bijectif.

$$\Rightarrow \underbrace{(P_{k_0}(u)) \circ P_2(u) \circ \dots \circ P_{k_0}(u) \circ \dots \circ P_r(u)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^r P_i \right) (u) = 0$$

$$\Rightarrow \exists Q = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^r P_i \text{ est un polynôme annulateur de } u$$

$$\deg Q < \deg \Pi_u \quad \text{inip}$$

$$b) x \in \ker(P_2(u)) \setminus \{0\}; F = \text{vect}(x, u(x))$$

$$\cdot x \in F \Rightarrow u(x) \in F$$

$$\cdot u(x) \in F \Rightarrow u^2(x) \in F \quad \underline{\text{car}}$$

$$x \in \ker P_2(u) \Rightarrow u^2(x) + a u(x) + b x = 0 \Rightarrow u^2(x) = -a u(x) - b x$$

$$\Rightarrow \text{Fonctionnelle linéaire}$$

$$\text{supp}(x, u(x)) \text{ est linéaire} \Rightarrow \text{Matrice } u_p \text{ vérifie } u_p$$

$$\Rightarrow (x, u(x)) \text{ est linéaire} \Rightarrow \underline{\dim F = 2}$$

u) si $\dim E = 1$ et $U \in O(E) \Rightarrow$
 $U \in \{Id_E, -Id_E\}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que le résultat est vrai pour n

Montrons le résultat pour $\dim E = n+1$
 et $U \in O(E)$

Car si $Sp(U) \neq \emptyset$.

D'après e.a). $\exists D$: dr. vecteur stable par U
 $\Rightarrow D^\perp$ stable par U
 $U|_D : D \rightarrow D$ endo. orthogon. $\Rightarrow D^\perp$ endo. orthogon.

$U|_{D^\perp} : D^\perp \rightarrow D^\perp$
 $\dim D^\perp = n$.

H.R $\exists B' = (e_1, \dots, e_n)$ BON B.D. $D^\perp$
 $Mat(U|_{D^\perp}, B') = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & R_{n-p} \end{pmatrix}$

$U(e_1) = z_1 \Rightarrow \exists p$ de $z_1 = \pm z_1$
 $\Rightarrow U(e_1) = \pm e_1$

Donc $\exists B'' = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{n+1})$

$$Mat(U, B'') = \begin{pmatrix} I_{p+1} & & \\ & R_{n-p} & \\ & & R_{n-p} \end{pmatrix}$$

ou $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & R_{n-p} & \\ & & R_{n-p} \end{pmatrix}$

Car $Sp(U) = \emptyset$

D'après e) $\exists F$ s.c. U stable par U avec $\dim F = 2$
 $U|_F : F \rightarrow F$ endo. orthogon.
 $\dim F = 2 \Rightarrow \det U|_F = 1$ ou $\det U|_F = -1$

$\exists B_2 = (e_1, e_2)$
 $Mat(U|_F, B_2) = R_{2,1}$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$
 $Mat(U|_F, B_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$\chi_{U|_F}(x) = x^2 - 1$
 $\chi_{U|_F}(x) = x^2 - 1$
 $\chi_{U|_F}(x) = x^2 - 1$

D'autre part $F^\perp$ stable par U

$\Rightarrow U_\perp: F^\perp \rightarrow F^\perp$ endo orthogonal.

$\dim F^\perp = n-1$.

H.R. $\exists B_1 = (e_1, \dots, e_{n-1})$ base de $F^\perp$

et $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{J}_0, 2\pi[i] \setminus \pi \setminus$ tq. $\text{Mat}(U_\perp, B_1) = \begin{pmatrix} L_p & & \\ & L_q & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$

Soit $B = B_1 \cup B_2 = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n, e_{n+1})$ base de E .

$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} L_p & & & \\ & L_q & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} & \\ & & & & & R_{\theta_{k+1}} \end{pmatrix}$

1) Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$.
 Soit $U \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ tq. $\text{Rat}(U, B_C) = 0$ BON.
 $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

Diagonalisable $\exists B$ BON de $\mathbb{R}^n$ tq.

$$\text{Rat}(U, B) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & \text{Roi} \dots \text{Roi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rat}(U, B_C) = P_{B_C \rightarrow B} \cdot \text{Rat}(U, B) \cdot P_{B \rightarrow B_C}$$

$$0 = P \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & \text{Roi} \dots \text{Roi} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$P = P_{B_C \rightarrow B}$ cette matrice
 de passage d'un BON à BON.
 $\Rightarrow P \in O_n(\mathbb{R})$

Partie III

1) $A \in SO_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$

$$\downarrow$$

$$(-1)^q = 1$$

$\Leftrightarrow q$ est pair

2) q pair. $\Rightarrow q = 2q'$

$$-I_q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_{\pi} & & \\ & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_{\pi} & \\ & & \ddots & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad q \text{ fois}$$

$$\Rightarrow 0 = P \begin{pmatrix} I_p & & \\ & \text{Roi} \dots \text{Roi} & \\ & & \text{Roi} \dots \text{Roi} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{J}_0, 2\pi$
 $p + 2n = n$

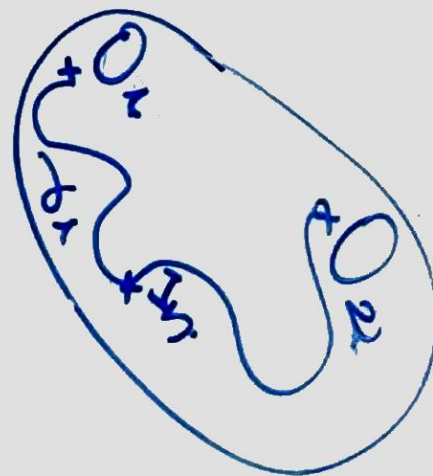
$$\text{lg } D = P \cdot \begin{pmatrix} I_P & R_{01} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_{0r} & \cdots \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$t \mapsto \gamma(t) = p \begin{pmatrix} I_p \\ R_{t\theta_1} \\ \vdots \\ R_{t\theta_n} \end{pmatrix} \text{pt.}$$
$$\cdot \delta(0) = I_n$$
$$\delta(1) = 0$$

- $\gamma(t) \in SO_n(\mathbb{R})$
- $t \mapsto \gamma(t)$

$t \mapsto \gamma(t)$ ist continu

$\Rightarrow$ For χ_1 character $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$

$\Rightarrow$ FF_1 Chemin reliant O_1 et I_1
 FF_2 " " O_2 et I_2



Soit $\gamma: [0,1] \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$
 $t \mapsto \gamma(t) = \gamma_2(t) \cdot \gamma_1(1-t)$

γ_1 et γ_2 sont continus $\Rightarrow \gamma$ continu.

$\gamma(0) = \gamma_2(0) \cdot \gamma_1(1) = \underset{\text{"in } O_n}{O_n}.$

$\gamma(1) = \gamma_2(1) \cdot \gamma_1(0) = O_1.$

$\gamma_1(t) \in SO_n(\mathbb{R})$
 $\gamma_2(t) \in SO_n(\mathbb{R}) \quad \left\{ \Rightarrow \gamma(t) \in SO_n(\mathbb{R}) \right.$
 " stable par $\times$.
 $\Rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs.

u) $A \in \pi_n(\mathbb{R})$

$H = \{ e^U \cdot A \cdot U; \quad U \in SO_n(\mathbb{R}) \}.$

Soit $f: \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R})$
 $U \mapsto e^U \cdot A \cdot U$

Soit $g: \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \times \pi_n(\mathbb{R})$
 $U \mapsto (e^U \cdot A, U)$

g est linéaire, $\hookrightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \infty \Rightarrow$ continu.

et $h: \pi_n(\mathbb{R}) \times \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R})$
 $(\pi, U) \mapsto \pi \cdot U.$

h est bilinéaire et $\hookrightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \infty$
 $\Rightarrow h$ continu.

$\Rightarrow f = h \circ g$ est continu.

et $H = f(SO_n(\mathbb{R}))$.

$SO_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs $\Rightarrow H$ connexe par arcs.

5.) Partie II.

$\dim E = 3$; $f \in \mathcal{K}(E)$; $f \neq \text{id}_E$;

$B = (v_1, v_2, v_3)$ B.O.N. de E .

$$\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$f \in \mathcal{O}(E)$ et $\det f = 1$.

a) $D = \ker(f - \text{id}_E)$; Pq. $\dim D = 1$.

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= (x-1)((x-\cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha) \\ &= (x-1)(x^2 - 2x \cos \alpha + 1). \end{aligned}$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \alpha - 4 = 4(\cos^2 \alpha - 1) \neq 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 1$$

$$\cos \alpha = 1 \Rightarrow \text{Mat}(f, B) = I_3 \text{ c.p.}$$

$$\cos \alpha = -1 \Rightarrow \chi_f(x) = (x-1)(x+1)^2$$

$\Rightarrow f$ a une seule v.p. $\lambda = 1$

$$\dim(\ker f - \text{id}_E) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\dim D = 1}.$$

$$b) \omega \notin D \rightarrow \omega = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$f(\omega) = \alpha v_1 + (\beta \cos \theta + \gamma \sin \theta) v_2 + (\beta \sin \theta + \gamma \cos \theta) v_3$$

$$\det_{B'}(v_1, \omega, f(\omega)) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta \cos \theta + \gamma \sin \theta \\ 0 & \gamma & \beta \sin \theta + \gamma \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= (\beta^2 \sin \theta + \beta \gamma \cos \theta) - \beta \gamma \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta$$

$$= (\beta^2 + \gamma^2) \sin \theta$$

$$\Rightarrow \det(v_1, \omega, f(\omega)) \propto \sin \theta$$

$$\det_B(x_1, x_2, x_3) = \det_B(x_1, x_2, x_3)$$

$$c) f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \text{Mat}(f, B_D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t A \cdot A = I_3 \text{ et } \det A = 1$$

$\Rightarrow$ f est une rotation de $\mathbb{R}^3$

L'axe de la rotation est

$$D = \ker(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v_1$$

L'angle de la rotation est $\theta = ?$

$$\Rightarrow \text{tr}(f) = 1 + 2 \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Si } \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin D$$

$$\det(v_1, \omega, f(\omega)) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$