

Série 1 "Espace Préhilbertien Réel"

Exercice 1 "Cours"

1) Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une B.O.N. $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Montrer que $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$

3) Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$

i) Montrer que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X Y \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et que}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^t X X.$$

2) Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Montrer que $\langle x, y \rangle = {}^t X M Y$ avec M est la matrice donnée par

$$M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

3) D'après MP2014.

Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace euclidien E .

a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Dédire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

3) D'après MP2019.

On pose $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'on définit un produit scalaire en posant pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B).$$

c) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie et que c'est un produit scalaire sur E .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par T_n la fonction définie par

$$T_n(x) = \cos(n \text{Arcos } x), x \in [-1, 1].$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall x \in [-1, 1]$.

b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n , déterminer son coefficient dominant.

- 3) a) Calculer $I(n, m) = \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
 b) Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E .
 c) Déterminer une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la famille $(\lambda_n T_n)$ soit une famille orthonormale de E .

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}.$$

- Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base orthonormée de F .
- Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans B .

Exercice 4

Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ structuré en espace préhilbertien réel à l'aide du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

Pour $i = 0, 1, 2, 3$ on considère la fonction $P_i : x \mapsto P_i(x) = x^i$.

- Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre mais non orthogonale de E .
- Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par (P_0, P_1, P_2) .
 a) Construire par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de F .
 b) Soit la projection orthogonale de P sur F . Exprimer $P(P_3)$ dans la base (Q_0, Q_1, Q_2) de F et calculer la distance de P_3 à F . Déterminer

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx.$$

Exercice 5 "Matrice de Gram"

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Soit u et v deux vecteurs quelconques de E .

$$\text{On note } G(u, v) = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle \end{vmatrix} \text{ et } G(u, v) = \det(\text{Gram}(u, v)).$$

Montrer que $G(u, v) \geq 0$. À quelle condition y a-t-il égalité?

- Soit u, v, w trois vecteurs quelconques de E .

$$\text{On note } \text{Gram}(u, v, w) = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle & \langle u|w \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle & \langle v|w \rangle \\ \langle w|u \rangle & \langle w|v \rangle & \langle w|w \rangle \end{vmatrix} \text{ et } G(u, v, w) = \det(\text{Gram}(u, v, w)).$$

- On suppose que w est orthogonal à u et v .
Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.
- On suppose que w est combinaison linéaire de u et v .
Calculer $G(u, v, w)$.

Dans la suite, on considère $u_1, \dots, u_n, n$ vecteurs de E .

On note : $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indice (i, j) est $\langle u_i | u_j \rangle$ et $G(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de celle-ci.

- On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1, \dots, u_n) = 0$.
- On suppose la famille $(u_1, \dots, u_n)$ libre. On introduit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel $F = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$, et on note $A = (a_{ij})$ la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(u_1, \dots, u_n)$.
- a) Montrer que $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n) = {}^t A A$.
 b) En déduire que $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.
- Soit $x \in E$, montrer que

$$(d(x, F))^2 = \frac{G(x, u_1, \dots, u_n)}{G(u_1, \dots, u_n)}.$$

Exercice 6

Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ structuré en espace préhilbertien réel à l'aide du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et $L_n(X) = U_n^{(n)}(X)$ (Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*).

1. Calculer L_0 , L_1 et L_2 .
2. a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
b) Justifier que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $U_n^{(k)}(1) = U_n^{(k)}(-1) = 0$ et que $L_n(1) \neq 0$ et $L_n(-1) \neq 0$
3. a) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle L_n, Q \rangle = 0$
b) Dédire que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que $\left(\frac{L_n}{\|L_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille totale de $\mathbb{R}[X]$.
5. Dédire pour tout $f \in E$ on a : $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, L_n \rangle}{\|L_n\|^2} L_n$
6. Calculer $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$

Exercice 7

On désigne par F le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions f de la forme $e^{-\frac{t^2}{2}} P(t)$ où P est une fonction polynomiale à coefficients réels. Pour tout entier naturel n , on note H_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H_n(t) = e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$.
: $F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$

- 1) Soit Φ $(f, g) \longmapsto \Phi(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$
- a) Justifier que Φ est bien définie.
- b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur F .

2) Montrer par récurrence sur n que H_n est une fonction polynomiale de degré n et calculer son coefficient dominant.

3) Pour tout entier naturel n , on pose : $g_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$.

- a) Montrer que si $n \neq p$, $\Phi(g_n, g_p) = 0$.
- b) Calculer $\lambda_n = (g_n, g_n)$.
- c) En déduire que la famille de fonctions $h_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} g_n$ est une famille orthonormale de F .

Exercice 8

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire : pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det A = 1\}$.

- 1) a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe et c'est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
b) Dédire que $O_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe et c'est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une B.O.N de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel si et seulement si ses vecteurs lignes forment une B.O.N de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3) On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

4) Montrer $O_2^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

5) Montrer que si $A \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $\det A = -1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$

tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

6) a) Soient θ_1 et θ_2 deux réels. Calculer $R_{\theta_1} R_{\theta_2}$

b) En déduire pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$.

Exercice 9

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie positive) si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXAX \geq 0$ (resp. pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ${}^tXAX > 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) &\longmapsto \frac{1}{n} \text{Tr}(M^t N). \end{aligned}$$

1) Montrer que $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

2) Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\begin{aligned} \Phi_A : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM + MA \end{aligned}.$$

a) Vérifier que Φ_A est un endomorphisme.

b) On suppose que A est une matrice symétrique. Montrer que

$$\langle \Phi_A(M), N \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle, \quad \forall M, N \in M_n(\mathbb{R})$$

3) Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, montrer que C est définie positive si et seulement si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$.

4) On suppose que S est une matrice symétrique définie positive.

a) Montrer qu'il existe une matrice Q symétrique définie positive telle que $S = Q^2$.

b) En déduire que l'endomorphisme Φ_S est défini positif.

5) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, Montrer que M est symétrique si et seulement si $\Phi_S(M)$ l'est aussi.

6) Soit $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que C est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

b) On suppose que C est définie positive et on considère la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda > 0.$$

i) Calculer $\Phi_C(M_\lambda)$.

ii) Montrer qu'on peut trouver des valeurs de λ et b pour lesquelles $\Phi_C(M_\lambda)$ ne soit pas définie positive.