

Série II Espace préhilbertien

Exercice 1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = IR_n[X]$. On pose

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On note $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base $(1, X, \dots, X^n)$

2. Montrer que $(P_k(0))^2 = 1, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
3. Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. En déduire $d(1, F) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ puis $d(1, F^\perp)$.

Exercice 2 .

On munit $IR[X]$ du produit scalaire

$$\forall P, Q \in IR[X] \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthogonal avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1
2. Étudier la parité des polynômes P_n .
(Ind : considérer la suite $(P_n(-X))$)
3. a) Vérifier que $\forall P, Q \in IR[X] \quad \langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$.
b) Prouver que pour chaque $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n \in (\mathbb{R}_{n-2}[X])^\perp$.

4. En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.

Exercice 3 .

On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout f et g dans E , on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. On pose $V = \{f \in E; f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E; f \text{ est } C^2 \text{ et } f'' = f\}$.
3. Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
4. Déterminer la projection orthogonale sur W .

Exercice 4 .

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \sqrt{\text{tr}({}^tAB)}.$$

On considère les matrices suivantes :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $F = \text{vect}\{U^k, 0 \leq k \leq n-1\}$.

1. Montrer que $(U^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base orthogonale de F
2. Déterminer la projection orthogonale de A sur F
3. .

Exercice 5 .

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ($\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$), $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Montrer que $\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, u(e_i) \rangle$.
2. On suppose dans cette question que la matrice de u dans la base B est à diagonale non nulle.
 - a) justifier il existe $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\langle e_i, u(e_i) \rangle > 0$ et $\langle e_j, u(e_j) \rangle < 0$.
 - b) Dédurre qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle x, u(x) \rangle = 0$.
(Ind : Considérer la fonction $\varphi(t) = \langle te_i + (1-t)e_j, u(te_i + (1-t)e_j) \rangle$, $t \in [0, 1]$).
3. Montrer par récurrence sur la dimension de E qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 6 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \neq 0_E$. Vérifier que $H_a = \{x \in E, \langle x, a \rangle = 0\}$ est un hyperplan.
2. Soit $\varphi : E \longrightarrow E^*$
 $a \longmapsto \varphi(a) : x \longmapsto \langle a, x \rangle$.
Montrer que φ est un isomorphisme.
3. Soit H un hyperplan de E et $H \neq E$. Démontrer qu'il existe un unique élément $a \neq 0_E$ tel que $H = H_a$.
4. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\int_0^1 Q(t)P(t)dt = 2P''(0) + 5P'(1) - 3P(2).$$

Exercice 7 .

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Soit $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Montrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous x et y dans E , $\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$.
3. Justifier que si f est une similitude, alors f conserve l'orthogonalité.
4. on considère f un endomorphisme non-nulle et on suppose qu'il conserve l'orthogonalité. On pose $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .
 - a) Démontrer que, pour tout couple $i, j \in \{1, \dots, n\}$
 $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
 - b) Dédurre que f est une similitude.

Exercice 8 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \sqrt{\text{tr}({}^tAB)}$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
 - a) Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|D - U\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \langle U, D \rangle + n$$

- b) Montrer que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \langle U, D \rangle \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Dédurre que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$.

2. Montrer pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AU\| = \|UA\| = \|A\|.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On admet qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = UPD{}^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 9 "Cours endo symétrique.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathbf{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On rappelle que u est un endomorphisme symétrique s'il vérifie

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

1. Soit u est un endomorphisme symétrique, montrer que

$$E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) \text{ et que } \operatorname{Im}(u) = \ker(u)^\perp$$

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \operatorname{Mat}(u, B)$.

a) Montrer que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

b) Dédurre que u est un endomorphisme symétrique si et seulement si $\operatorname{Mat}(u, B)$ est une matrice symétrique.

3. Soit u est un endomorphisme symétrique, montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$.

4. Soit λ et μ deux valeurs propres distincts de u . Montrer que les sous espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

5. Soit u est un endomorphisme symétrique et F un sous espace vectoriel de E .

Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u .

6. Soit u est un endomorphisme de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) u est un endomorphisme symétrique.

ii) $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u deux à deux distincts.

iv) u est diagonalisable dans une B.O.N.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que

A est une matrice symétrique réelle si et seulement si il existe une matrice P orthogonale et D une matrice diagonale tel que $A = {}^t P D P$.

8. Soit u un endomorphisme symétrique on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u rangés dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$). On pose $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

a) Montrer que f est continue sur E .

b) Justifier que E admet une base $B' = (v_1, \dots, v_n)$ formée des vecteurs propres de u .

c) Montrer que $\forall x \in E$,

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

d) Dédurre que f est bornée sur $S(O, 1)$ la sphère unité et déterminer $\min_{x \in S(O, 1)} f(x)$ et $\max_{x \in S(O, 1)} f(x)$.

Exercice 10 .

$$1) \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que A est diagonalisable et trouver une matrice diagonale D et une matrice P orthogonale tels que $A = {}^t P D P$.

$$2) \text{ Même question pour la matrice } B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$