

Exercice 1

1) $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ B.O.N de E

a) $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$
 $\forall i, j \leq n, \langle x, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle$

Ainsi; $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$

b) $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j \langle e_i, e_j \rangle \right)$
 $= \sum_{i=1}^n x_i y_i$
 $\Rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t x \cdot {}^t y$

Espace pré-hilbertien

1) $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

On a $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle$
 $= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \langle e_i, e_j \rangle$

D'autre part on a:

${}^t x \cdot {}^t y = {}^t x \cdot \left(\langle e_i, e_j \rangle \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
 $= (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_j \rangle y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \langle e_n, e_j \rangle y_i \end{pmatrix}$

$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle y_j$
 $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$

Ainsi: $\langle x, y \rangle = {}^t x \cdot {}^t y$

2) a) F et G deux s.v. de E (E eu)
 $\Pi_F (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

On a $F \subset F+G \Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp$
 et $G \subset F+G \Rightarrow (F+G)^\perp \subset G^\perp$
 $\Rightarrow (F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$
 Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, on a $x \in (F+G)^\perp$
 Soit $y \in F+G \Leftrightarrow y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F$
 $y_2 \in G$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$$x \in F^\perp \text{ et } y_1 \in F \Rightarrow \langle x, y_1 \rangle = 0$$

$$x \in G^\perp \text{ et } y_2 \in G \Rightarrow \langle x, y_2 \rangle = 0$$

Alors $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (F+G)^\perp$
 $\Rightarrow F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

$\mathcal{C}$
 $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

d) D'après a)
 $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$
 $= F \cap G$ (car E est euclidien)

$$\Rightarrow (F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp} = (F \cap G)^\perp$$

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$$

b) $S_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{R})$
 en appliquant la définition.

Oubien: On peut remarquer que
 $S_n(\mathbb{R}) = \ker \varphi$ avec $\varphi: M \mapsto {}^t M - M$
 et on vérifie que φ est linéaire.

De même $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{R})$.

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}): M = \frac{M + {}^t M}{2} + \frac{M - {}^t M}{2}$$

$$= M_1 + M_2$$

avec $M_1 = \frac{M + {}^t M}{2} \in S_n(\mathbb{R})$

et $M_2 = \frac{M - {}^t M}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = {}^t M \\ M = -{}^t M \end{cases} \Rightarrow 2M = \vec{0} \Rightarrow M = \vec{0}$$

D'où $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{\vec{0}\}$

$\mathcal{C}$
 $S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

b) On a $\langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$
 est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{re} variable.

forme symétrique

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}({}^t B \cdot A) = \text{tr}({}^t ({}^t B \cdot A)) \\ = \text{tr}({}^t A \cdot B) = \langle A, B \rangle$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot A) = \sum_{i=1}^n ({}^t A \cdot A)_{ii} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^t A)_{ij} A_{ji} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot a_{ji} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2 \geq 0$$

• Si $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow A = \vec{0}$$

$\underline{cl}$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

$\Rightarrow$ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, i.e. $A \in M_n(\mathbb{R})$

Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\left. \begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr}({}^t A \cdot B) = \text{tr}(A \cdot B) \\ \langle B, A \rangle &= \text{tr}({}^t B \cdot A) = -\text{tr}(B \cdot A) \\ &\Rightarrow \text{tr}(AB) = -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(AB) = 0 \\ \Rightarrow \langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow A \in M_n(\mathbb{R})^\perp$$

Ainsi $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})^\perp$

Puisqu'on a montré que si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\langle A, B \rangle = 0$

on déduit que $M_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$
 $M_n(\mathbb{R})^\perp \subset S_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow M_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$

Exercice 2.

$E = \mathbb{R}[X]$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini :

On a $x \mapsto P(x)Q(x)$ est continue sur $[-1, 1]$
 Alors elle est bornée. $\Leftrightarrow \exists M \geq 0$ tq $\forall x \in [-1, 1]$

Aussi $|P(x)Q(x)| \leq M \Rightarrow \left| \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\dots \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \text{ intég. curv.}$

ou $\theta(-1) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1+x}}$ intég sur $(-1, 1)$

Ainsi $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intég sur $]-1, 1[$

Ce qui montre que $x \mapsto \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie

* Il y a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

C'est facile à vérifier que :

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positive

• $\langle p, p \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

Comme : $x \mapsto \frac{p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue positive et intégrable sur $]-1, 1[$

Alors $\frac{p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \forall x \in]-1, 1[$

$\Rightarrow P(x) = 0 \quad \forall x \in]-1, 1[$
 $\Rightarrow P$ admet une infinité de racines

$\Rightarrow P = 0$
 Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini
cl $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur E .

2) Il y a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

On a $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x)$

$$= \cos(n\arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n\arccos x) \sin(\arccos x)$$

$$+ \cos(n\arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n\arccos x) \sin(\arccos x)$$

$$= 2x \cos(n\arccos x)$$

$$= 2x T_n(x)$$

b) On a $T_0(x) = 1; T_1(x) = x$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n$ un polynôme de degré n et de coef dominant 2^{n-1} .

Pour $n=1$ vrai

$n=2 \rightarrow T_2 = 2x^2 - x$: poly de degré 2 et de coef dominant 2^1 .

soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat est vrai à l'ordre n et $n+1$, et montrons à l'ordre $n+2$.

$$\text{On a } T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} T_n \text{ poly} \\ \text{et } T_{n+1} \text{ poly} \end{array} \right\} \Rightarrow T_{n+2} \text{ poly.}$$

$$\deg T_{n+1} = n+1 \Rightarrow \deg 2xT_{n+1} = n+2 > \deg T_n$$

$$\text{D'où } \deg T_{n+2} = \deg(2xT_{n+1}) = n+2$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{Coef}_{\text{don}}(T_{n+2}) &= \text{Coef}_{\text{don}}(2xT_{n+1}) \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } I(n, m) &= \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) dx \end{aligned}$$

* Si $n=m=0$

$$I(0, 0) = \int_0^\pi dx = \pi$$

$$\begin{aligned} * \text{ Si } n=m \neq 0 \\ \Rightarrow I(n, n) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2nx) + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin(2nx) + x \right]_0^\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(n, n) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Si } n \neq m \\ I(n, m) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+m} \sin(n+m)x + \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$I(0, 0) = \pi$$

$$I(n, n) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$I(n, m) = 0 \text{ si } n \neq m$$

b) On a $\forall n \neq m, T_n \in E$ et

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } u &= \arccos x \\ du &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi \cos(nu) \cos(mu) du$$

$$\langle T_n, T_m \rangle = I(n, m) = 0$$

$\Rightarrow$ la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

c) On a $\langle T_0, T_0 \rangle = \|T_0\|^2 = \pi$

$\Rightarrow \frac{T_0}{\sqrt{\pi}}$ est de norme 1

et $\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} = \|T_n\|^2$

$\Rightarrow \frac{T_n}{\sqrt{\pi/2}}$ est de norme 1

$\Rightarrow \exists \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

lg. $(\lambda_n T_n)$ est une famille orthogonale

Exercice 3

$P_i(x) = x^i$; $0 \leq i \leq 2$.

1) $\pi_q(P_0, P_1, P_2)$ est libre de E .

$\forall 0 \leq i \leq 2$; $P_i \neq 0$ et $P_i \in E$.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ lg $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0, \forall x \in]-1, 1[$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \alpha_0=0 \\ x=1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x=-1 \Rightarrow -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2=0 \\ \alpha_2=\alpha_1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (P_0, P_1, P_2)$ est libre

* $\langle P_0, P_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \neq 0$

$\therefore P_0 \neq P_2 \Rightarrow$ la famille (P_0, P_1, P_2) n'est pas orthogonale.

2) $F = \text{vect}(P_0, P_1, P_2)$

a) On utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour construire une famille orthogonale

On pose: $\phi_0 = P_0$

$\phi_1 = P_1 + \alpha_0 \phi_0$

avec $\langle \phi_1, \phi_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = - \frac{\langle P_1, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}$

ou $\langle P_1, \phi_0 \rangle = \langle P_1, P_0 \rangle$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \cdot dx = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$\Rightarrow \phi_1 = P_1$

$\phi_2 = P_2 + \alpha_0 \phi_0 + \alpha_1 \phi_1$ lg.

$\alpha_0 = - \frac{\langle P_2, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}$ et $\alpha_1 = - \frac{\langle P_2, \phi_1 \rangle}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}$

$\langle P_2, \phi_0 \rangle = \langle P_2, P_0 \rangle = \frac{1}{3}$

$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx = 1$

$\langle P_2, \phi_1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx = 0$

$\Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{3}$ et $\alpha_1 = 0$

$\rightarrow: \varphi_2 = p_2 - \frac{1}{3} \varphi_0 = p_2 - \frac{1}{3} p_0 = x^2 - \frac{1}{3}$
 $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une famille orthogonale

On pose $H_0 = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$; $H_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$
 et $H_2 = \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}$

On a $\|\varphi_0\|^2 = \|p_0\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx = 1$
 $\Rightarrow \|\varphi_0\| = 1$

$\bullet \|\varphi_1\|^2 = \|p_1\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow \|\varphi_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\bullet \|\varphi_2\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} dx$

$= \int_0^1 x^4 + \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{9}$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{9} = \frac{19}{45} = \frac{19}{45}$

$\Rightarrow \|\varphi_2\| = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{45}}$

$\Rightarrow H_0 = \varphi_0$; $H_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_1$ et $H_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \varphi_2$
 $(H_0; H_1, H_2)$ est une base orthonormale
de F.

b) P : projection orthogonale sur F.

$d(P_3, F) = \min \{ \|P_3 - \varphi\|; \varphi \in F \}$

$= \|P_3 - P_F(P_3)\|$

Puisque (H_0, H_1, H_2) est une B.O.N.
 de F, alors

$P_F(P_3) = \sum_{k=0}^2 \langle P_3, H_k \rangle \cdot H_k$

$\bullet \langle P_3, H_0 \rangle = \langle P_3, p_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$

$\bullet \langle P_3, H_1 \rangle = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

$\bullet \langle P_3, H_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} x \right) \right) dx$

$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left(x^5 - \frac{1}{3} x^4 \right) dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5}$

Alors $P_3 - P_F(P_3) = x^3 - \frac{2}{15} H_1 - \frac{1}{5\sqrt{2}} H_2$

$= x^3 - \frac{2}{15} \cdot \frac{x}{3} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} x \right) \right)$

$= x^3 - \frac{2}{45} x - \frac{3}{10} x^2 + \frac{1}{10} x$

$= x^3 - \frac{3}{10} x^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{2}{45} \right) x$

Exercice.

$$E = C([1, 1], \mathbb{R}) ; \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = U_n^{(n)}(x)$$

$$1) \quad P_0(x) = U_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = (U_1(x))' = 2x$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (U_2(x))'' = ((x^2 - 1)^2)'' \\ &= (2(x^2 - 1)(2x))' \\ &= 4(x \cdot 2x + (x^2 - 1)) \\ \boxed{P_2(x) = 4(3x^2 - 1)} \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{On a. } \deg U_n = 2n$$

$$\Rightarrow \deg P_n = \deg(U_n^{(n)}) = 2n - n = n$$

Le monôme de plus haut degré de U_n est : x^{2n} . Comme $(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} x^n$

$$\Rightarrow \text{Coef. dominant de } P_n \text{ est } \frac{(2n)!}{n!}$$

$$3) \quad \text{On a } U_n(x) = (x-1)^n (x+1)^n$$

$\Rightarrow 1$ et -1 sont des racines de U_n de multiplicité n

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall 0 \leq k \leq n-1, \quad U_n^{(k)}(1) &= U_n^{(k)}(-1) \\ \text{et } U_n^{(n)}(1) &\neq 0 ; \quad U_n^{(n)}(-1) \neq 0 \\ \Rightarrow P_n(-1) &\neq 0 \text{ et } P_n(1) \neq 0 \end{aligned}$$

4) a) soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\langle P_n, Q \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx.$$

Ipp

$$= [Q(x) U_n^{(n-1)}(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(x) Q'(x) dx$$

$$= Q(1) \underbrace{U_n^{(n-1)}(1)}_{U_0} - Q(-1) \underbrace{U_n^{(n-1)}(-1)}_{U_0} - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(x) Q'(x) dx$$

$$= - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(x) Q'(x) dx$$

Montrons par récurrence que $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\langle P_n, Q \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 U_n^{(n-k)}(x) Q^{(k)}(x) dx$$

Le résultat est vérifié pour $k=1$

soit $1 \leq k \leq n-1$, supposons le résultat est vrai à l'ordre k et montrons le à l'ordre $k+1$.

$$\text{On a } \langle P_n, Q \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 U_n^{(n-k)}(x) Q^{(k)}(x) dx$$

IPP:

$$U = \varphi^{(k)}$$

$$U' = \varphi^{(k+1)}$$

$$\varphi' = \varphi^{(n-k)}$$

$$U = \varphi^{(n-k-1)}$$

$$(-1)^k \left(\int_{-1}^1 \varphi^{(k)}(x) \varphi^{(n-k-1)}(x) dx \right) - \int_{-1}^1 \varphi^{(k+1)}(x) \varphi^{(n-k-1)}(x) dx$$

$$\text{or } 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 \leq n-k-1 \leq n-2$$

$$\Rightarrow \varphi^{(n-k-1)}(-1) = \varphi^{(n-k-1)}(1) = 0$$

$$\langle P_n, \varphi \rangle = (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 \varphi^{(k+1)}(x) \varphi^{(n-(k+1))}(x) dx$$

ainsi

$$\forall 1 \leq k \leq n: \langle P_n, \varphi \rangle = (-1)^k \langle U_n^{(n-k)}; \varphi^{(k)} \rangle$$

Pour $k=n$

$$\langle P_n, \varphi \rangle = (-1)^n \langle U_n^{(0)}; \varphi^{(n)} \rangle$$

$$\text{Comme } \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \Leftrightarrow \deg \varphi \leq n-1 \Rightarrow \varphi^{(n)}(x) = 0$$

$$\text{ou } \langle P_n, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Soit $n \neq m$. (on suppose que $m < n$)

d'après ce qui précède

$$\langle P_n, P_m \rangle = 0 \text{ car } P_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments non nuls, alors la famille $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

5) a) Π_q la famille $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $E \iff \Pi_q$.

$$\text{vect} \left\{ \frac{P_n}{\|P_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} = E = C([0,1], \mathbb{R})$$

Justifier que $\text{vect} \left\{ \frac{P_n}{\|P_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{R}[X]$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|} \right)$$

est une famille de poly de degrés échelonnés, alors elle est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ et plus elle est de cardinal n , alors elle forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \text{or } \text{vect} \left\{ \frac{P_n}{\|P_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{vect} \left\{ \frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|} \right\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$.

⑨

D'après le théorème de Weierstrass
 $\exists (Q_n)$ suite de fonction polynomiale

$$\text{tg } Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f, \text{ pour } \|\cdot\|_\infty$$

$$\text{ou } \|Q_n - f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |Q_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot \|Q_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \text{ pour } \|\cdot\|_2.$$

$$\text{cl } \forall f \in C([0,1], \mathbb{R}); \exists Q_n \in \text{vect} \left\{ \frac{P_n}{\|P_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{tg } Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f, \text{ pour } \|\cdot\|_2.$$

$$\Rightarrow \text{vect} \left\{ \frac{P_n}{\|P_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} = C([0,1], \mathbb{R})$$

b) on a $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille totale

orthonormée, alors,

$$\forall f \in E; f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \frac{P_n}{\|P_n\|} \rangle \cdot \frac{P_n}{\|P_n\|}$$

Exercice "Matrice de Gram"

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ famille de vecteurs de E .

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
 alors $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tg $x_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i x_i$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq n; \langle x_{i_0}, x_j \rangle = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle$$

Comme.

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_{i_0}, x_1 \rangle & \langle x_{i_0}, x_2 \rangle & \dots & \langle x_{i_0}, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

Alors la ligne. $L_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i L_i$

Ce qui montre que $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = 0$

et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre

$$F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \dim F = n$$

$$B = (e_1, \dots, e_n) \text{ B.O.N de } F.$$

$$x_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_j = \sum_{i=1}^n \langle x_j, e_i \rangle e_i$$

$$\Rightarrow \Pi = \text{mat}_B(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, e_1 \rangle & \dots & \langle x_n, e_1 \rangle \\ \langle x_1, e_2 \rangle & \dots & \langle x_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, e_n \rangle & \dots & \langle x_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle = \langle x_j, e_i \rangle$$

$$\text{D'où } (\mathbb{E} \Pi \cdot \Pi)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E} \Pi)_{ik} \cdot \Pi_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle$$

$$\text{Comme } (G(x_1, \dots, x_n))_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^n \langle x_j, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle e_k, \sum_{\ell=1}^n \langle x_j, e_\ell \rangle e_\ell \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle$$

$$\text{Ainsi } \forall i, j \quad (\mathbb{E} \Pi \cdot \Pi)_{ij} = (G(x_1, \dots, x_n))_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{E} \Pi \Pi = G(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\begin{aligned} b) \det G(x_1, \dots, x_n) &= \det(\mathbb{E} \Pi \cdot \Pi) \\ &= \det \mathbb{E} \Pi \cdot \det \Pi \\ &= (\det \Pi)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{or } \Pi = \det(x_1, \dots, x_n)$$

avec $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre

$$\Rightarrow \det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\det G(x_1, \dots, x_n) > 0}$$

$$3) \text{ Soit } x \in E.$$

$$d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$$

avec P_F est la projection orthogonale sur F .

On rappelle que $x = x - P_F(x) + P_F(x)$

$$\text{avec } x - P_F(x) \perp P_F(x)$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2$$

$$\text{Ainsi } G(x, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, x_1 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_1, x \rangle & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x \rangle & \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

or $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \langle x, x_i \rangle &= \langle x - P_F(x), x_i \rangle + \langle P_F(x), x_i \rangle \\ &= \langle x - P_F(x), x_i \rangle + \langle P_F(x), x_i \rangle \end{aligned}$$

Comme $x - P_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x - P_F(x), x_i \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle x, x_i \rangle = \langle P_F(x), x_i \rangle$$

Ainsi

$$\begin{aligned} G(x, x_1, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2, <P_F(x), x_1> - <P_F(x), x_n> \\ <P_F(x), x_1>, <x_1, x_1> \dots <x_1, x_n> \\ <P_F(x), x_2>, <x_2, x_1> - <x_2, x_n> \\ \vdots \\ 0, <P_F(x), x_n> \dots <x_n, x_n> \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2, <P_F(x), x_1> - <P_F(x), x_n> \\ 0, <P_F(x), x_1> \\ \vdots \\ 0, <P_F(x), x_n> \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La 1^{ère} colonne de la matrice $G(x, x_1, \dots, x_n)$ est la somme de deux col et l'app $\det$ est linéaire / si la 1^{ère} variable, alors

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \det \begin{pmatrix} \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2, <P_F(x), x_1> - <P_F(x), x_n> \\ 0, <P_F(x), x_1> \\ \vdots \\ 0, <P_F(x), x_n> \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \|P_F(x)\|^2, <P_F(x), x_1> - <P_F(x), x_n> \\ <P_F(x), x_1>, <x_1, x_1> \dots <x_1, x_n> \\ \vdots \\ <P_F(x), x_n>, <x_n, x_1> \dots <x_n, x_n> \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \|x - P_F(x)\|^2 \det G(x_1, \dots, x_n) + \det G(P_F(x), x_1, \dots, x_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$ la famille $(P_F(x), x_1, \dots, x_n)$ est liée $\Rightarrow$ son d'après 1) $\det G(P_F(x), x_1, \dots, x_n) = 0$

$$\text{Ainsi } \det(x, x_1, \dots, x_n) = (\det(x, F))^2 \det G(x_1, \dots, x_n)$$

Exercice 8

1) L'app $(\pi, N) \mapsto b_\pi(\pi, N)$ est un produit scalaire sur $\Pi_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\Pi_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \pi, N \in \Pi_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda\pi + N) &= A(\lambda\pi + N) + (\lambda\pi + N)A \\ &= \lambda A\pi + AN + \lambda\pi A + NA \\ &= \lambda(A\pi + \pi A) + AN + NA \\ &= \lambda\Phi_A(\pi) + \Phi_A(N) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_A$ est linéaire.

$\forall \pi \in \Pi_n(\mathbb{R}), \Phi_A \in \Pi_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \Phi_A$ est un endo de $\Pi_n(\mathbb{R})$

2) A est symétrique $\Leftrightarrow {}^t A = A$.
 Soit $M, N \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_A(M), N \rangle &= \langle AM + MA, N \rangle \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}((AM + MA) \cdot {}^t N) \\ &= \frac{1}{n} (\operatorname{tr}(AM {}^t N) + \operatorname{tr}(MA {}^t N)) \\ &= \frac{1}{n} (\operatorname{tr}({}^t (AM {}^t N)) + \operatorname{tr}({}^t (MA {}^t N))) \\ &= \frac{1}{n} (\operatorname{tr}(N {}^t M \cdot A) + \operatorname{tr}(N {}^t A \cdot M)) \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A \cdot N {}^t M) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(N {}^t A \cdot M) \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}((AN + NA) {}^t M) \\ &= \langle AN + NA, M \rangle \\ &= \langle \Phi_A(N), M \rangle = \langle M, \Phi_A(N) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_A$ est un endo symétrique.

3) Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$. avec C est symétrique

Alors $\operatorname{Sp}(C) \subset \mathbb{R}$

¶ C est définie positive $\Leftrightarrow \operatorname{Sp}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$

" $\Rightarrow$ " Soit λ vp de $C \Rightarrow \exists X \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

tel $C \cdot X = \lambda X \Rightarrow \underbrace{X^t C \cdot X}_{>0} = \lambda X^t X$

$$\Rightarrow \lambda {}^t X \cdot X > 0 \Rightarrow \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0, \forall \lambda \text{ v.p. de } C$$

" $\Leftarrow$ " hyp : $\forall \lambda$ vp de C ; $\lambda > 0$

¶ C est définie positive.
 On a C est symétrique réelle, alors d'après le théorème spectral, il existe

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $C = P D P^t$

$\forall X \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$$C \cdot X \cdot C \cdot X = {}^t X {}^t P \cdot D \cdot P X$$

$$= {}^t (P X) \cdot D \cdot P X$$

$$= {}^t Y \cdot D \cdot Y \quad \text{avec } Y = P X$$

$$= {}^t Y \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^t Y \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

$$\geq 0$$

or $Y = P X$ avec $X \neq 0$ et P inversible

d'où $Y \neq 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $y_i \neq 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0 \Rightarrow {}^t X \cdot C \cdot X > 0$$

$\Leftrightarrow C$ est définie positive.

4) Soit S une matrice définie positive

a) D'après 3) $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après la décomposition spectrale

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$\begin{aligned} S &= {}^t P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P \\ &= {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \\ &= {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P \cdot {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \\ \Rightarrow S &= Q^2 \text{ avec } Q = {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \end{aligned}$$

D'autre part; On a ${}^t Q = Q \Rightarrow Q$ est symétrique. et on a $Sp(Q) = (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \subset \mathbb{R}_+^*$

Alors Q est définie positive d'après 3/.

b) On a S est symétrique, d'après 2-a/ Φ_S est symétrique.

$\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ Φ_S est définie positif

$\Leftrightarrow \forall \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$$\langle \Phi_S(\eta), \eta \rangle > 0.$$

On a d'après a/ S est définie positive
alors il existe Q définie positive tq

$$S = Q^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \langle \Phi_S(\eta), \eta \rangle &= \frac{1}{n} \text{tr}(\Phi_S(\eta), {}^t \eta) \\ &= \frac{1}{n} \text{tr}(Q^2 \eta, {}^t \eta) \\ &= \frac{1}{n} \text{tr}(Q^2 \eta, {}^t \eta) + \frac{1}{n} \text{tr}(\eta, Q^2 \eta) \\ &= \frac{1}{n} \text{tr}(Q \eta, {}^t Q \eta) + \frac{1}{n} \text{tr}(\eta, Q \cdot Q \cdot {}^t \eta) \\ &= \frac{1}{n} \text{tr}(Q \eta, {}^t (Q \eta)) + \frac{1}{n} \text{tr}(\eta, Q \cdot ({}^t \eta)) \\ &= \|Q \eta\|^2 + \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \langle \Phi_S(\eta), \eta \rangle \geq 0$$

Supposons que $\langle \Phi_S(\eta), \eta \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \|Q \eta\|^2 + \|\eta\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|Q \eta\|^2 = 0 \text{ et } \|\eta\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Q \eta = \tilde{0} \text{ et } \eta = \tilde{0}$$

$$\Rightarrow \eta = \tilde{0} \text{ (car } Q \text{ inversible) impossible}$$

$$\Rightarrow \langle \Phi_S(\eta), \eta \rangle > 0, \forall \eta \neq \tilde{0}.$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi_S \text{ est définie positif.}}$$

$$\Rightarrow " \quad \text{Si } \Pi \text{ est symétrique} \\ \Phi_S(\Pi) = {}^t(S\Pi + \Pi S) = {}^t\Pi \cdot {}^tS + {}^tS \cdot {}^t\Pi \\ = \Pi S + S\Pi = \Phi_S(\Pi)$$

$\Rightarrow \Phi_S(\Pi)$ est symétrique.

" $\Leftarrow$ " Si $\Phi_S(\Pi)$ est symétrique.

$$\Leftrightarrow {}^t(S\Pi + \Pi S) = \Pi S + S\Pi$$

$$\Leftrightarrow {}^t\Pi \cdot {}^tS + S {}^t\Pi = \Pi S + S\Pi$$

$$\Leftrightarrow \Phi_S({}^t\Pi) = \Phi_S(\Pi)$$

or S est définie positive

d'où Φ_S est définie positive

$$\Rightarrow \text{Ainsi } Sp(\Phi_S) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$\Rightarrow \Rightarrow$ on ne peut pas v.p. de Φ_S

$\Rightarrow \Phi_S$ inversible $\Rightarrow \Phi_S$ injective

$$\text{D'où : } [{}^t\Pi = \Pi]$$

$$6) \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

a) C est symétrique.

D'après 3) C est définie positive.

ssi $Sp(C) \subset \mathbb{R}_+^*$

soit $Sp_{\mathbb{R}}(C) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Puisque C est symétrique réelle, alors son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(C) = a + c \\ \text{et } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det C = ac - b^2 \end{cases}$$

$$\text{Alors } Sp(C) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \\ \text{et } \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac > b^2 \\ \text{et } a + c > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac > 0 \\ \text{et } a + c > 0 \\ \therefore ac > b^2 \end{cases} \Rightarrow a > 0$$

reciproquement

$$\text{Si } \begin{cases} ac > b^2 \\ \text{et } a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c > 0 \\ \text{et } a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c > 0 \\ \text{et } ac > b^2 \end{cases} \Leftrightarrow Sp(C) \subset \mathbb{R}_+^*$$

b) $\mathbb{H}_K$ est définie positive:

$$\pi_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda > 0$$

i) $\Phi_C(\pi_\lambda) = C \cdot \pi_\lambda + \pi_\lambda \cdot C$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\lambda & b \\ b\lambda & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a\lambda & b(1+\lambda) \\ b(1+\lambda) & 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après b)

$\Phi_C(\pi_\lambda)$ n'est pas définie positive si :

$$2a\lambda \leq 0$$

$$\text{ou } 4a\lambda c - b^2(1+\lambda)^2 \leq 0$$

Comme C est définie positive, alors $a > 0$

et on a $\lambda > 0 \Rightarrow 2a\lambda > 0, \forall \lambda$

① $\Leftrightarrow -b^2\lambda^2 + (4ac - 2b^2)\lambda - b^2 \leq 0$
poly de degré 2 en λ

$$\Delta = (4ac - 2b^2)^2 - 4b^4 = 4ac(ac - b^2) > 0$$

$\Rightarrow$ le poly $P(\lambda) = -b^2\lambda^2 + (4ac - 2b^2)\lambda - b^2$ possède deux racines λ_1 et λ_2 avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

on choisit alors

$$\Rightarrow \underline{I(\lambda) \leq 0}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda \notin]\lambda_1, \lambda_2[$$

exercice 7 "Questions de cours"

1) $O_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices orthogonales = $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^t A \cdot A = I_n\}$

a) Mq : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
 On a: $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- Soient $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A \cdot A = I_n$
 $B \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t B \cdot B = I_n \Leftrightarrow B^{-1} = {}^t B$

$$\begin{aligned} {}^t (AB^{-1}) \cdot (AB^{-1}) &= {}^t (B^{-1}) \cdot {}^t A \cdot A \cdot B^{-1} \\ &= {}^t ({}^t B) \cdot B^{-1} = B B^{-1} = I_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

* Mq $O_n(\mathbb{R})$ est compact.
 Puisque $\dim M_n(\mathbb{R}) < \infty$, il suffit de

mq $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé et borné.

$\rightarrow$ On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$.

$$M \mapsto \|M\| = \sqrt{\text{tr}({}^t M \cdot M)}$$

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}): \|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^t A \cdot A)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$$

$\Rightarrow [O_n(\mathbb{R}) \text{ est bornée}] \quad \textcircled{1}$

$\rightarrow \text{Mq } O_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}$

$$\text{On a: } O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = I_n\}$$

$$= f^{-1}(\{I_n\})$$

$$\text{avec } f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto f(A) = {}^t A \cdot A$$

Montrons que f est continue.

$$\text{Soit } g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$$

$$A \mapsto ({}^t A, A)$$

$$\text{et } h: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \mapsto A \cdot B$$

* g est une app. linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$
 $\dim M_n(\mathbb{R}) < \infty$

$\Rightarrow g$ est continue.

* h est bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$
 avec $\dim M_n(\mathbb{R}) < \infty$

Alors h est continue.

Ce qui montre que la fonction hog est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

$$\text{or } \text{hog}(A) = h(g(A)) = h({}^t A, A) = {}^t A \cdot A = f(A), \forall A.$$

$\Rightarrow f = \text{hog} \Rightarrow f \text{ est continue sur } M_n(\mathbb{R})$

Puisque f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$
 et $\{I_n\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$
 Alors $\textcircled{2} O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$

b) $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A = 1\}$

- $O_n^+(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$

- $I_n \in O_n^+(\mathbb{R})$

- soient $A, B \in O_n^+(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A \cdot B^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ (d'après ce qui précède)

$\det(A \cdot B^{-1}) = \det(A) \cdot \frac{1}{\det B} = 1$

$\Rightarrow AB^{-1} \in O_n^+(\mathbb{R})$

Ainsi $O_n^+(\mathbb{R})$ est un s-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

$\rightarrow O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A = 1\}$
 $= O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}\{1\}$

On a l'application $\det$ est continue
 et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. alors
 $\det^{-1}\{1\}$ est un fermé.

De plus $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé, et
 $O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}\{1\}$ est un fermé

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}\{1\}$ fermé
 $\subset O_n(\mathbb{R}) = \text{compact}$

$O_n^+(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}\{1\}$ est un compact

soit $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

les C_i sont les colonnes de A .

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A \cdot A = I_n$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^t C_1 \\ \vdots \\ {}^t C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^t C_1 C_1 & {}^t C_1 C_2 & \dots & {}^t C_1 C_n \\ {}^t C_2 C_1 & {}^t C_2 C_2 & \dots & {}^t C_2 C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t C_n C_1 & {}^t C_n C_2 & \dots & {}^t C_n C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow {}^t C_i \cdot C_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ la famille des vecteurs colonne
 $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ forme une B.O.N de $\mathbb{R}^n$.

en utilisant A orthogonale

$\Leftrightarrow A^t A = I_n$, on vérifie que

A orthogonale. $\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes forment une B.O.V de $\mathbb{R}^n$

2) Montrons que $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$
 avec $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$;

$${}^t R_\theta \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$\Rightarrow R_\theta \in O_n(\mathbb{R})$

de plus $\det R_\theta = 1 \Rightarrow R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \subset SO_2(\mathbb{R})$

" $\subset$ " soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow A \cdot A = I_2$ et $\det A = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } ad - bc = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ba + dc = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \text{ et } ad - bc = 1$$

On a $a^2 + c^2 = 1$
 $\Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $c = \sin \theta$
 $a = \cos \theta$

Il y a $a = d$ et $b = -c$.
 Pour cela, on calcule.

$$(a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + d^2 - 2ad + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$= a^2 + c^2 + b^2 + d^2 + 2(bc - ad) = 2 + 2(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-d)^2 = 0 \text{ et } (b+c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = d \text{ et } b = -c$$

$$\text{Ainsi } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

$\Rightarrow SO_2(\mathbb{R}) \subset \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$

$$\stackrel{cl}{=} SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$$

b) même démonstration que a)

c) $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= R_{01} + 0_{02}$$

d) Par récurrence; $\forall k \in \mathbb{N}; (R_0)^k = R_{k0}$.

3) Soit f un endomorphisme symétrique.

a) Soit λ v.p. de f . ($\lambda \in \mathbb{C}$)

On considère $A = \pi(f, B)$ avec $B \subset B.O.M. \subset E$
 $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, alors $A \in M_n(\mathbb{R})$
 avec A est symétrique.

λ v.p. de A . $\Leftrightarrow \exists x \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tq

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$

$$\Rightarrow t(\overline{Ax}) = \overline{\lambda} t\overline{x}$$

$$\Rightarrow t(\overline{Ax}) \cdot x = \overline{\lambda} t\overline{x} \cdot x$$

$$\Rightarrow t\overline{x} \cdot t\overline{Ax} = \overline{\lambda} t\overline{x} \cdot x = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

or $A \in M_n(\mathbb{R})$ et symétrique, alors

$$t\overline{A} = A \quad t\overline{x} \cdot Ax = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

$$\text{Ainsi } t\overline{x} \cdot \lambda x = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda \|x\|^2 = \overline{\lambda} \|x\|^2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \overline{\lambda}} \quad \text{puisque } x \neq 0$$

b) F s.e.-v. de E tq F stable par f .

On a $F^\perp$ stable par f .

Soit $x \in F^\perp$, tq $f(x) \in F^\perp$

Soit $y \in F$;

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$$

car $x \in F^\perp$ et $f(y) \in F$

c) $\lambda \neq \mu$; $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$.

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

$$\langle f(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \text{car } \lambda \neq \mu.$$

d) On a $\text{Im } f = (\ker f)^\perp$.

Soit $x \in \ker f$ et $y \in \text{Im } f$
 $\Leftrightarrow f(x) = 0$ et $\exists x' \in E$ tq $y = f(x')$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(x') \rangle = \langle \underbrace{f(x)}_0, x' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im } f \perp \ker f.$$

$$\Rightarrow \text{Im } f \subset (\ker f)^\perp$$

D'après le th. du rang

$$\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \ker f = \dim (\ker f)^\perp$$

$$\text{Alors } \text{Im } f = (\ker f)^\perp.$$

e) On a $\dim E < \infty$, alors

$$E = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$$

$$E = \ker f \oplus \text{Im } f$$

SS: P projecteur orthogonal
 P symétrique

" $\Leftarrow$ " P un projecteur, de plus est
symétrique, alors d'après / $\text{Im } P = (\ker P)^\perp$
 $\Rightarrow P$: projecteur orthogonal.

" $\Rightarrow$ " hyp: P : projecteur orthogonal.
 $\Rightarrow \text{Im } P \perp \ker P$

Soient $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\langle P(x), y \rangle &= \langle P(x); y - P(y) + P(y) \rangle \\ &= \underbrace{\langle P(x), y - P(y) \rangle}_{\in \text{Im } P} + \underbrace{\langle P(x), P(y) \rangle}_{\in \ker P} \\ &= \langle P(x), P(y) \rangle\end{aligned}$$

$$\text{donc } \langle x, P(y) \rangle = \langle P(x), P(y) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$$

Ainsi P est symétrique