

Correction Série II préhilbertien.

Exercice 1

1) $\forall P, Q \in E; \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$

L'app $\langle ; \rangle$ est un produit scalaire sur E .

$F = \{ P \in E; P(0) = 0 \}$

2) On a $(P_0, \dots, P_n)$ B.O.N de E

Alors $\|P_k\|^2 = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} (P_k(t))^2 e^{-t} dt = 1$

IPP : On pose $U = (P_k(t))^e \rightarrow U'(t) = e P_k(t) P_k'(t)$
 $U' = e^{-t} \rightarrow U = -e^{-t}$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P_k(t))^e e^{-t} = 0$ et on a $t \mapsto (P_k(t))^e e^{-t}$ Intégrable

Alors $\int_0^{+\infty} (P_k(t))^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} U'(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} P_k(t) P_k'(t) e^{-t} dt$
 $= (P_k(0))^e + e \langle P_k, P_k' \rangle$

Puisque $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ B.O.N de $\mathbb{R}_n[x]$ obtenue par l'orthogonalisation de Schmidt de $(1, x, \dots, x^n)$, alors

$\text{vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \text{vect}(1, \dots, x^k)$
 $\forall k \leq n \text{ s.n. } \textcircled{1}$

$\Rightarrow \text{vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \mathbb{R}_k[x]$

$\Rightarrow$ Puisque $\forall k \in \text{s.n. } (1); P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[x]^{\perp}$

$\Rightarrow \langle P_k, P_k' \rangle = 0 \quad (P_k' \in \mathbb{R}_{k-1}[x])$

Ainsi : $\|P_k\| = 1 \Rightarrow P_k H^e = (P_k(0))^e, \forall k \in \{1, \dots, n\}$
 De plus $P_0 = \frac{1}{\|1\|} = 1 \Rightarrow \|P_0(0)\|^e = 1$

3) $F = \ker \varphi$ avec

$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire
 $P \mapsto \varphi(P) = P(0)$

et on a $\varphi(1) \neq 0$

$\Rightarrow F$ est un hyperplan. $\Rightarrow \dim F = n-1$

D'où $\dim F^{\perp} = 1$.

On pose $Q \in E; \text{t.q. } F^{\perp} = \text{vect}(Q)$

$Q \in E \Rightarrow Q = \sum_{k=0}^n \langle Q, P_k \rangle P_k$

de plus $Q_k - Q_k(0) \in F \Rightarrow \langle P_k - P_k(0), Q \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle P_k, Q \rangle = \langle P_k(0), Q \rangle = P_k(0) \langle 1, Q \rangle$

$\Rightarrow Q = \sum_{k=0}^n \langle 1, Q \rangle P_k(0) P_k$

$Q = \langle 1, Q \rangle \cdot \sum_{k=0}^n P_k(0) P_k$

$\frac{Q}{\|Q\|}$ est une B.O.V de $F^\perp$.

$1 \in E \Rightarrow \exists 1_F \in F$ et $1_{F^\perp} \in F^\perp$ tq

$$1 = 1_F + 1_{F^\perp}$$

$$d(1, F) = \|1 - 1_F\| = \|1_{F^\perp}\|$$

$$\begin{aligned} \text{or } 1_{F^\perp} &= \langle 1, \frac{Q}{\|Q\|} \rangle \cdot \frac{Q}{\|Q\|} \\ &= \frac{\langle 1, Q \rangle}{\|Q\|^2} Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|1_{F^\perp}\| = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|}$$

Puisque $Q = \langle 1, Q \rangle \cdot \sum_{k=0}^n P_k(0) \cdot P_k$
et $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ B.O.V de E , alors

$$\|Q\|^2 = \langle 1, Q \rangle^2 \cdot \sum_{k=0}^n |P_k(0)|^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|Q\| &= |\langle 1, Q \rangle| \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n |P_k(0)|^2} \\ &= \sqrt{n+1} \cdot |\langle 1, Q \rangle| \end{aligned}$$

car

$$d(1, F) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$* d(1, F) = \|1 - 1_{F^\perp}\| = \|1_F\|$$

D'après pythagore. $\|1\|^2 = \|1_F\|^2 + \|1_{F^\perp}\|^2$

$$\text{or } \|1\|^2 = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$$\text{D'où } \|1_F\| = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 2.

$\perp \nexists ! \exists !, (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\deg P_n = n$
 $\text{Corf } \dim P_n = 1$

Par récurrence.

Pour $n=0$: on pose $P_0 = 1 \exists !$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat est vrai jusqu'à l'ordre n c'ad

$\forall k \in \{0, \dots, n\} \exists ! P_k$ tq $\deg P_k = k$
 $\text{Corf } \dim P_k = 1$

Montrons $\exists ! P_{n+1}$ tq $\deg P_{n+1} = n+1$
 $\text{Corf } \dim P_{n+1} = 1$

On pose $P_{n+1} = X^{n+1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$

Puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale $\mathbb{R}_n[X]$

$$\Rightarrow Q = \sum_{k=0}^n \langle Q, P_k \rangle \cdot \frac{P_k}{\|P_k\|}$$

et on a $P_{n+1} \perp P_k \Rightarrow$

$$\langle Q, P_{n+1} \rangle = \langle X^{n+1}, P_{n+1} \rangle +$$

$$\langle P_{n+1}, P_k \rangle = \langle x^{n+1}, P_k \rangle + \langle Q, P_k \rangle$$

$$\Rightarrow \langle Q, P_k \rangle = - \langle x^{n+1}, P_k \rangle$$

$$\Rightarrow P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle x^{n+1}, P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \cdot P_k$$

→ ce qui montre l'existence et l'unicité de $Q \Rightarrow$ l'existence et l'unicité de P_{n+1}

e) le poly. $(-1)^n P_n(-x)$ est un poly unitaire de degré n . Par unicité, on déduit que $(-1)^n P_n(-x) = P_n(x)$

$$\Leftrightarrow P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$\Rightarrow P_n$ a la même parité que n

e) a) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned} \langle xP, Q \rangle &= \int_{-1}^1 xP(x)Q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 P(t) \langle Q(t), x \rangle dt = \langle P, xQ \rangle \end{aligned}$$

b) Soit $n \geq 1$.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

$$\langle P_{n+1} - xP_n, Q \rangle = \langle P_{n+1}, Q \rangle - \langle P_n, xQ \rangle = 0 - 0 = 0$$

4) On a $\deg P_{n+1} = n+1$ et $\text{Coef} \text{ de } x^n = 1$
 $\deg P_n = n$ et " " = 1

$$\Rightarrow P_{n+1} - xP_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

$$\Rightarrow P_{n+1} - xP_n = \sum_{k=0}^n \langle P_{n+1} - xP_n, P_k \rangle \frac{P_k}{\|P_k\|^2}$$

D'après 3-a) $\langle P_{n+1} - xP_n, P_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n-2\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{n+1} - xP_n &= \frac{\langle P_{n+1} - xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} P_n \\ &\quad + \frac{\langle P_{n+1} - xP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_n = \frac{\langle P_{n+1} - xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} \quad \text{tel que}$$

$$P_{n+1} - xP_n = \lambda_n P_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P_{n+1} = xP_n + \lambda_n P_{n-1}}$$

Exercice 6

$$a \in E \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow H_a = \{x \in E; \langle x, a \rangle = 0\}$$

$$= (\text{vect}\{a\})^\perp$$

Puisque $\dim \text{vect}\{a\} = 1$ et $\dim E = n$.
 Alors $\dim (\text{vect}\{a\})^\perp = n-1$
 $\Rightarrow H_a$ est un hyperplan.

2) H hyperplan de E alors il existe
 f une forme linéaire non nul. t.q.
 $H = \ker f$ ($f \in E^* \setminus \{0\}$).

Soit $\varphi: E \rightarrow E^*$
 $a \mapsto \varphi(a): x \mapsto \langle a, x \rangle$

On a. $\forall a, b \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda a + b)(x) &= \langle \lambda a + b, x \rangle \\ &= \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle \\ &= (\lambda \varphi(a) + \varphi(b))(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda a + b) = \lambda \varphi(a) + \varphi(b)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire.

• Soit $a \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = 0 \Leftrightarrow$
 $\langle a, x \rangle = 0, \forall x \in E \Rightarrow a \in E^\perp = \{0\}$
 $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow \varphi$ est injective

Comme $\dim E^* = \dim E = n$
 $\Rightarrow \varphi$ est bijective.
 $\Rightarrow \varphi$ isomorphisme d'e.v.

Comme $f \in E^* \setminus \{0\} \Rightarrow \exists a \in E$
 t.q. $f = \varphi(a) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(a)(x)$
 $= \langle a, x \rangle, \forall x \in E$

Comme $H = \ker f$, alors

$$\begin{aligned} H &= \{x \in E; \text{t.q. } f(x) = 0\} \\ &= \{x \in E; \text{t.q. } \langle a, x \rangle = 0\} \\ &= H_a \end{aligned}$$

Notons que. $f \neq 0 \Rightarrow a \neq 0_E$.

3) ...

Soit $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto f(P) = 2P''(0) + 5P'(0) - 3P(0)$$

f est une forme linéaire
 $\Leftrightarrow f \in E^*$

Puisque φ est bijective, alors

D'après 2) $\exists a \in \mathbb{R}_n[X]$ t.q.

$$\varphi(a) = f \Leftrightarrow \langle a, P \rangle = f(P), \forall P$$

On a. i.e. que $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de.

5

Produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle \longrightarrow \int_0^1 Q(t)P(t) dt.$$

$$\text{Alors } \forall P: \int_0^1 Q(t)P(t) dt = P'(1) - P'(0) = -3P(2).$$

Exercice 5

1) Soit $U \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ B.O.N

$$\text{Soit } A = \text{Mat}(U, B) \Rightarrow a_{ij} = \langle U(e_j), e_i \rangle = \langle e_i, U(e_j) \rangle$$

$$\Rightarrow \text{tr}(U) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \langle e_i, U(e_i) \rangle$$

2) Soit A est à diagonale non nulle.

$$\Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } a_{i_0 i_0} \neq 0$$

$$\text{Or } \text{tr}(U) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle e_i, U(e_i) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \exists i \neq j \text{ tq } \langle e_i, U(e_i) \rangle < 0 \text{ et } \langle e_j, U(e_j) \rangle > 0$$

$$b) \text{ Soit } \varphi(t) = \langle t e_i + (1-t) e_j, U(t e_i + (1-t) e_j) \rangle$$

$$t \in [0, 1]$$

L'app $t \mapsto t e_i + (1-t) e_j$ est continue sur $[0, 1]$

U linéaire et $\dim E < \infty \Rightarrow U$ continue

$$\Rightarrow t \mapsto U(t e_i + (1-t) e_j) \text{ est continue sur } [0, 1]$$

L'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire + donc

d'ou continue... Ainsi φ est continue

$$\text{Qu'on : } \varphi(t) = t^2 \langle e_i, U(e_i) \rangle + t(1-t) \langle e_i, U(e_j) \rangle + (1-t)t \langle U(e_i), e_j \rangle + (1-t)^2 \langle e_j, U(e_j) \rangle$$

$\Rightarrow \varphi$ polynôme $\Rightarrow \varphi$ continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{De plus } \varphi(0) = \langle e_j, U(e_j) \rangle > 0$$

$$\varphi(1) = \langle e_i, U(e_i) \rangle < 0$$

$$\text{T.V.I. } \exists t_0 \in [0, 1] \text{ tq } \varphi(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \langle t_0 e_i + (1-t_0) e_j, U(t_0 e_i + (1-t_0) e_j) \rangle = 0$$

$$\text{Soit } x = t_0 e_i + (1-t_0) e_j$$

$$\Rightarrow \langle x, U(x) \rangle = 0$$

que (e_i, e_j) est libre $\Rightarrow x \neq 0$

$$c) \text{ Si } \dim E = 1 \text{ et } U \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \text{tr}(U) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Mat}(U, B) = (a) \text{ avec } a = 0$$

$$\text{puisque } \text{tr}(U) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Mat}(U, B) \text{ est à diagonale nulle.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons le résultat est vrai si $\dim E = n$ et $\forall U \in \mathcal{L}(E)$ tq $\text{tr}(U) = 0$

Montrons le résultat pour $n+1$

Soit E un espace euclidien avec $\dim E = n+1$
 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\text{tr}(u) = 0$

$$A = \text{Mat}(u, B)$$

• Si A est à diagonale nulle. le résultat est vérifié

• Si A est à diagonale non nul. D'après question 2/ il existe un vecteur non nul $v_1 \neq 0 \in E$ tq $\langle u(v_1), v_1 \rangle = 0$

On peut supposer que $\|v_1\| = 1$.

On complète v_1 pour obtenir une B.O.N de E , $B' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\text{Alors } \text{Mat}(u, B') = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow \text{tr}(u) = 0 \Rightarrow \text{tr}(A') = 0$$

On considère $F = \text{vect}(v_2, v_3, \dots, v_n)$
 et $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ tq $\text{Mat}(u|_F, (v_2, \dots, v_n)) = A'$
 or $\dim F = n$ et $\text{tr}(u) = \text{tr}(A') = 0$
 $\Rightarrow \text{tr}(u|_F) = 0$

Par (H.R), $\exists B_1$ B.O.N de $\text{vect}(v_2, \dots, v_n)$
 tq $A_1 = \text{Mat}(u|_F, B_1)$ est à diagonale nulle.

On pose $P_1 = P_{B'' \rightarrow B_1}$
 avec $B'' = (v_2, \dots, v_n)$

$$\text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$

P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Notons que $A' = P_1 C_1 P_1^{-1}$
 avec C_1 à diagonale nulle.

$$\Leftrightarrow C_1 = P_1^{-1} A' P_1$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & \underbrace{P_1^{-1} A' P_1}_{C_1} & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P^{-1} A P$ est à diagonale nulle.

f similitude de rapport $\lambda \Leftrightarrow$

$$\|f(x)\| = \lambda \|x\|.$$

1) Si $u+v \perp u-v$, alors $\langle u+v, u-v \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2 - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \|v\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u\| = \|v\|.$$

2) Πf similitude de rapport $\lambda \Leftrightarrow$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

" " Pour $y=x$, on obtient.

$$\|f(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

" " $\forall x, y \in E:$

$$\|f(x+y)\| = \lambda \|x+y\| \Leftrightarrow$$

$$\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle)$$

$$\Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

$$3) \text{ Si } \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

4) soit $f \neq 0$. $B = (e_1, \dots, e_n)$ B.O.N. de E .

hyp f conserve l'orthogonalité.

a) soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\bullet \text{ Si } i=j \Rightarrow \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|.$$

$$\bullet \text{ Si } i \neq j; \text{ on a } e_i + e_j \perp e_i - e_j$$

Comme f conserve l'orthogonalité, alors

$$f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j)$$

$$\Leftrightarrow f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$$

$$\Rightarrow \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\| \text{ d'après 1)}$$

$$b) \text{ soit } x \in E; x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|^2.$$

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ famille orthogonale.

Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ " "

$$\Rightarrow \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|f(e_i)\|^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \|f(e_1)\|^2$$

$$= \|x\|^2 \cdot \|f(e_1)\|^2$$

$$\Rightarrow \|f(x)\| = \lambda \|x\| \text{ avec } \lambda = \|f(e_1)\|.$$

$\Rightarrow f$ similitude