

Rappel : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une p.e.s. préhilbertienne
 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille totale.
II. II
 $\text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\} = E$.

Théorème :

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille totale et orthonormale.

$F_n = \text{vect}\{e_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$.

P_n : projection orthogonale sur F_n .

ABP : i) $\forall x \in E$; $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$,
 ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x)\|^2 = \|x\|^2$

Démo : $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\langle x, e_n \rangle)^2 \leq \|x\|^2$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$

En effet

i) $\text{vect}(e_n, n \in \mathbb{N}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$

Soit $x \in E = \text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$.
 $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ p.
 $\|x - y\| < \varepsilon$.

$y = \sum_{k=0}^n \langle y, e_k \rangle e_k$

note $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$

$$y \in \text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } y \in F_{n_0}$$

$$\Rightarrow y \in F_n, \forall n \geq n_0$$

$$\text{Puisq. } \|P_n(x) - x\| = d(x, F_n)$$

$$\leq \|x - y\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq n_0, \|P_n(x) - x\| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n(x) - x\| = 0$$

$$x \in \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} \exists (x_n) \subset A$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{2} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$

$$x \in \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} \exists (x_n) \subset A \text{ s.t. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{2} \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, \text{ s.t. } \|x - y\| < \varepsilon$$

x_0 racine de P d'ordre n .

$$\begin{cases} p^{(k)}(x_0) = 0, \forall 0 \leq k \leq n-1 \\ p^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_0)^n \mid P \\ \text{et } (x-x_0)^{n+1} \nmid P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = (x-x_0)^n \Phi(x) \\ \text{avec } \Phi(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Exercice "Serie 1"

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n.$$

$$L_n(x) = [(x^2 - 1)^n]^{(n)} = (U_n(x))^{(n)}.$$

$$1) \begin{cases} L_0(x) = (U_0(x))^{(0)} = U_0(x) = 1 \\ L_1(x) = 2x. \\ L_2(x) = 12x^2 - 4. \end{cases}$$

e) a/m $\deg U_n = 2n \rightarrow \deg L_n = 2n - n = n.$

si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$).

$$P^{(k)}(x) = a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} + \dots$$

Coef de $U_n = 1.$

$$\Rightarrow \text{" " } L_n = \frac{(n)!}{(n-n)!} = \frac{(n)!}{n!}.$$

b) $U_n(x) = (x-1)^n (x+1)^n$
- et L sont des racines de U_n
donc multiplie n .

$$\Rightarrow \forall 0 \leq k \leq n-1: U_n^{(k)}(1) = U_n^{(k)}(-1) = 0$$

(et $U_n^{(n)}(1) \neq 0, U_n^{(n)}(-1) \neq 0$)

a/ Soit $\varphi \in \mathcal{R}_{n-1}[x].$

$$\text{Pg. } \langle L_n, \varphi \rangle = 0.$$

$$\text{ona } \langle L_n, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x) \varphi(x) dx.$$

$$= \int_{-1}^1 U_n^{(n)}(x) \varphi(x) dx.$$

Ipp. $f = \varphi \rightarrow f' = \varphi'$

$$g' = U_n^{(n)}$$

$$\Rightarrow \langle L_n, \varphi \rangle = \left[U_n^{(n-1)} \varphi(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi(x) U_n^{(n-1)}(x) dx$$

$$0$$

D'où $\langle L_n, \varphi \rangle = - \int_{-1}^1 \varphi'(x) \psi_n^{(n-1)}(x) dx$

Montrons par récurrence que :

$\forall k \in \{1, \dots, n\}; \langle L_n, \varphi \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 \varphi^{(k)}(x) \psi_n^{(n-k)}(x) dx.$

Pour $k=1$, le résultat est vrai.

Soit $k \in \{1, \dots, \underline{n-1}\}$, supposons le résultat est vrai pour k et montrons pour $k+1$.

$$\begin{aligned} \langle L_n, \varphi \rangle &= (-1)^k \int_{-1}^1 \varphi^{(k)}(x) \psi_n^{(n-k)}(x) dx \\ &\stackrel{\text{Ipp.}}{=} (-1)^k \left(\int_{-1}^1 \varphi^{(k)}(x) \psi_n^{(n-k)}(x) dx - \int_{-1}^1 \varphi^{(k+1)}(x) \psi_n^{(n-k-1)}(x) dx \right) \end{aligned}$$

$$= (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 \varphi^{(k+1)}(x) \psi_n^{(n-k-1)}(x) dx.$$

D'où le résultat.

Pour $\underline{k=n} \Rightarrow \langle L_n, \varphi \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 \varphi^{(n)}(x) \psi_n^{(0)}(x) dx$
 $= 0$

b) $\forall i, j \in \mathbb{N}^2$ tq : $i \neq j$ on suppose $i < j$
 $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ car. $L_i \in R_{j-1}[X]$
 $\Rightarrow$ la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

4) $\deg L_i = i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow L_i \neq 0$
 $\Rightarrow \|L_i\| \neq 0$

$\Rightarrow$ la famille $\left(\frac{L_n}{\|L_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

[Tq. cette famille est totale :
 Tq. vect]

$\left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} = E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle, R)$

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{L_n}{\|L_n\|} \in R[X]$

$\Rightarrow \text{vect} \left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset R[X]$

soit $P \in R[X]$ (deg $P = N \in \mathbb{N}$).

$\Rightarrow P \in R_N[X]$

$\forall k \leq N : \frac{L_k}{\|L_k\|} \in R_N[X]$

la famille $\left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \dots, \frac{L_N}{\|L_N\|} \right)$ est orthogonale
 de cardinal = dim $R_N[X]$.

$\Rightarrow \left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \dots, \frac{L_N}{\|L_N\|} \right)$ B.O.N de $R_N[X]$.
 $\Rightarrow P \in R_N[X] = \text{vect} \left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \dots, \frac{L_N}{\|L_N\|} \right)$

Donc $R[X] \subset \text{vect} \left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\}$
 Ainsi $R[X] = \text{vect} \left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Soit $f \in C([1, 1], \mathbb{R})$

Alors d'après le th Weierstrass: $\exists (P_n)$ suite de fonctions

Polynomiales. $P_n \xrightarrow{C} f$ sur $[1, 1]$
 $\Leftrightarrow \|P_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{ou } \|P_n - f\| = \left(\int_{-1}^1 |P_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f \text{ pour } \|\cdot\|_{\infty}$$

Autr. $\forall f \in E, \exists (P_n) \in \text{vect} \left\{ \frac{t^n}{\|t^n\|_{\infty}} \right\}$
 $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$

$$\Rightarrow \text{vect} \left\{ \frac{t^n}{\|t^n\|_{\infty}} \right\} = E$$

Soit $f \in C([1, 1], \mathbb{R})$
 Alors d'après le th Weierstrass: $\exists (P_n)$ suite de fonctions

Polynomiales. $P_n \xrightarrow{L_\infty} f$ sur $[1, 1]$
 $\Leftrightarrow \|P_n - f\|_{L_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{or } \|P_n - f\| = \left(\int_{-1}^1 |P_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f \text{ pour } \|\cdot\|_{L_2}$$

Ainsi $\forall f \in E, \exists (P_n) \in \text{vect} \left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|_{L_2}} \right\}$
 $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pour $\|\cdot\|_{L_2}$

$$\Rightarrow \text{vect} \left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|_{L_2}} \right\} = E$$

5) on a. $\left\{ \frac{L_n}{\|L_n\|}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est une famille
orthonormale et totale, a tous

$$\forall f \in E; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f) = f \text{ pour } \|\cdot\|.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f, \frac{L_n}{\|L_n\|} \right\rangle \frac{L_n}{\|L_n\|} = f.$$

$$6) \quad \sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, L_n \rangle^2}{\|L_n\|^2} \right\}$$

$$= \left(\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 6x - 5) dx, x^3 - 2x^2 - 6x - 5 \right) / 2.$$

$$= \frac{\|x^3 - 2x^2 - 6x - 5\|^2}{2}.$$

Problème "Hermite"

Partie I:

E est un r.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$3) F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

$= \ker \varphi$ avec $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$

φ forme linéaire $f \mapsto \varphi(f) = f(0)$.

$1 \in E$ (1 est ∞ et $x \mapsto 1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ est intégrable)

$\varphi(1) = 1 \neq 0$
 $\Rightarrow \varphi$ non nul $\Rightarrow F$ hyperplan.

$E = F \oplus \text{Vect}\{1\}$

$$b) f \in F \perp \mathcal{C}E$$

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} f(x), x \in \mathbb{R}.$$

$$i) f \text{ est } \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow g \text{ est } \infty \\ \Rightarrow g \text{ est } \infty \end{array} \right.$$

$$|g(x)| \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{\frac{x^2}{2}} \cdot g^2(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}} \cdot f^2(x)$$

$$\Rightarrow x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} g^2(x) \text{ est intégrable}$$

$$\Rightarrow g \in F, \text{ de plus } g(0) = 0$$

$$ii) \{0\} \in F \perp \text{r.v.}$$

$$\text{Soit } f \in F \perp, \text{ d'après (i) } g \in F.$$

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot f^*(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

$$\Rightarrow x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} f^*(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ Continuous, } \oplus \text{ et int\'egrable sur } \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} f^*(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, f^*(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \neq 0.$$

$$\text{or } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f = 0 \Rightarrow F \perp \{0_E\}$$

$$(iii) \text{ Supposons } E = F \oplus F^\perp \Rightarrow E = F. \text{ car } \begin{matrix} 1 \notin F \\ 1 \in F^\perp \end{matrix}$$

c) $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \varphi(f) = f(0)$

i) Suppose g is a function $g \in E$ s.t.
 $\varphi(f) = \langle f, g \rangle, \forall f \in E$

Let $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = e^{-nx^2} \in E$

$\Rightarrow \varphi(f_n) = \langle f_n, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$f_n''(0) = 1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}$

Then, $x \mapsto e^{-nx^2} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$

$f_n \xrightarrow[h]{} \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ g(0) & \text{if } x = 0 \end{cases}$

h is $C \cap \text{int}(\mathbb{R})$

$|h_n(x)| \leq |g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}|, \forall x \in \mathbb{R}$

Let $x \mapsto |g(x) e^{-\frac{x^2}{2}}| \in C \cap \text{int}(\mathbb{R})$
 et intég sur $\mathbb{R}$

car $g \in E$ et $e^{-\frac{x^2}{2}} \in E \Rightarrow g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \in \text{int}(\mathbb{R})$

T.C.D. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} g(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
 $\Rightarrow$ absurd. $\sqrt{\pi}$

Théorème de Représentation de Riesz

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien

$\forall \varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire

$\exists! a \in E$ tq. $\varphi(x) = \langle x, a \rangle, \forall x \in E$

Effet

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) =$ l'espace des formes linéaires $E \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $\varphi: E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
 $a \mapsto \varphi(a): E \rightarrow \mathbb{R}$

φ est linéaire
soit $a \in \ker \varphi$

$\Rightarrow \varphi(a) = \vec{0} \Leftrightarrow \langle x, a \rangle = 0, \forall x \in E$

$\Rightarrow \varphi$ injective

$\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
 $\Rightarrow \varphi$ bijection

$\forall \varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire
 $\exists! a \in E$ tq. $\varphi(a) = \varphi$

$\Downarrow$
 $\varphi(x) = \langle x, a \rangle, \forall x \in E$

$$ii) \quad \varphi \in (\mathbb{R}_2[X])$$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\varphi(p) = \langle p, \varphi \rangle, \quad \forall p \in \mathbb{R}_2[X]$$

$$\begin{cases} 1 = \varphi(1) = \langle 1, \varphi \rangle = \int \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi(x^2) = \langle x^2, \varphi \rangle \end{cases}$$

Partie II:

$$e) \quad a) \quad h^{(n+2)}(x) = p_{n+2}(x) h(x)$$

$$= [p_n''(x) - 2x p_n'(x) + (x^2 - 1)p_n(x)] h(x)$$

D'autre part: $h^{(n+2)}(x) = (h'(x))^{(n+1)}$
 $= (-x h(x))^{(n+1)}$

$$\begin{aligned} \text{L'absorbé: } &= - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{n+1} x^{(k)} \cdot h^{(n+1-k)}(x) \\ &= - (x h^{(n+1)}(x) + (n+1) h^{(n)}(x)) \\ &= - (x \cdot (p_n'(x) - x p_n(x)) + (n+1) p_n(x)) h(x) \end{aligned}$$

D'où

$$p_n''(x) - x p_n'(x) + n p_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow p_n \text{ vérifie l'éq diff. } (y'' - xy' + ny = 0)$$

$$b) \quad p_n' = (p_{n-1}' - x p_{n-1})' = p_{n-1}'' - x p_{n-1}' - p_{n-1}$$

$$= -n p_{n-1}$$

$$3) \quad \varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

$$p \mapsto \varphi(p) = p'' - x p'$$

b) Mat $(\varphi, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n(n-1) \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(1) = 0$

$\varphi(x) = -x$

$\forall k \leq n, \varphi(x^k) = k(k-1)x^{k-2} - kx^k$

c) φ admet $(n+1)$ v.p. $\lambda = 0$ et $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$
Donc φ est diagonalisable.

d) $\forall p, \varphi \in \mathbb{R}_n[x], \langle \varphi(p), \varphi \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(p) \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx$

$\int_{-1}^1 \left(\frac{p'(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{x^2}{2}} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 p'(x) e^{\frac{x^2}{2}} \varphi'(x) dx$

$\forall \varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire

$\exists! a \in E$ tq $\varphi(a) = \varphi$

$\varphi(x) = \langle x, a \rangle, \forall x \in E$

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

2^e partie part

$$\langle P, \varphi(\varphi) \rangle = \langle \varphi(P), P \rangle$$

$$= -\frac{1}{k\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{\frac{x^2}{2}} p'(x) dx$$

$$= \langle \varphi(P), \varphi \rangle.$$

e) φ endo symétrique
 $d_1 \neq d_2$ sup. de φ .

Alors $E_{d_1} \perp E_{d_2}$.

con. $x \in E_{d_1}$ et $y \in E_{d_2}$.

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = d_1 \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow (d_1 - d_2) \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\varphi(P_n) = P_n'' - x P_n' = -n P_n.$$

$$\Rightarrow \varphi(H_n) = -n H_n.$$

$$\Rightarrow H_n \text{ v.p. de } \varphi \text{ autoéc. de } (-n)$$

$$\text{et } H_k \text{ v.p. " " " " } -k \neq -n.$$

$$\Rightarrow \langle H_k, H_n \rangle = 0$$

$\Rightarrow (H_0, \dots, H_n)$ est une famille orthogonale
 deg $H_k = k \in \mathbb{N} \Rightarrow H_k \neq 0$.

$\Rightarrow (H_0, \dots, H_n)$ est libre dans $(R_n[x])$
 de cardinal $= n+1 = \dim(R_n[x])$.

$\Rightarrow$ Orthogonalité de $R_n[x]$.

$$u) \|H_k\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_k^2(x) e^{-x^2} dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_k(x) e^{-x^2} dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_k(x) \cdot h(x) dx$$

$$u = P_k \rightarrow u' = P_k'$$

$$v = h(x) \rightarrow v = h^{(k)}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_k'(x) h^{(k-1)}(x) dx$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_{k-1}(x) h^{(k-1)}(x) dx$$

$$\mathcal{Q}(P_n) = P_n'' - x P_n' = -n P_n$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}(H_n) = -n H_n.$$

$$\Rightarrow H_n \text{ v } P \text{ do. l'associee}$$

$$\text{et } H_k \text{ v } P \text{ " " "}$$

$$\Rightarrow \langle H_k, H_n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (H_0, \dots, H_n) \text{ est une famille}$$

$$\deg H_k = k \in \mathbb{N} \Rightarrow H_k \neq 0$$

$$\Rightarrow (H_0, \dots, H_n) \text{ est libre de}$$

$$\text{de cardinal } = n+1 = \dim V_n$$

$$\Rightarrow \text{Basis de } V_n$$