

Rappel:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$${}^t A \cdot A = \left({}^t c_i \cdot c_j \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\langle c_i, c_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

$${}^t A A = I_n \Leftrightarrow \langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc A est orthogonale $\Leftrightarrow$ les vecteurs colonne (ou les vecteurs lignes) forment une BON de $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^n$
 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

→ soit $B_1 = (c_1, \dots, c_n)$ BON de E .
 $B_2 = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E

$$P_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \\ \langle e_j, e_i \rangle & & \\ | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

$$\forall 1 \leq j \leq n, e_j = \sum_{i=1}^n \langle e_j, e_i \rangle e_i$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow {}^t P \cdot P = I_n$$

$$\rightarrow U \in \mathcal{O}(E) \text{ et } B = \underline{\text{BON de } E}$$

$${}^t \text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} u_{e_1} & \dots & u_{e_n} \\ | & & | \\ \langle e_i, u_j \rangle & & \\ | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

$$\forall 1 \leq j \leq n, u_j = \sum_{i=1}^n \langle u_j, e_i \rangle e_i$$

→ Isendo symétrique $\Leftrightarrow \langle U(x, y) \rangle = \langle x, U(y) \rangle$
 $\forall x, y \in E$

⇒ $\text{Mat}(U, B)$ est Symétrique
soit

→ Soit P une projection orthogonale
 $\forall x, y \in E$.

$\langle P(x), y \rangle = \langle P(x), y - P(y) + P(y) \rangle$
 $\in F \quad \in F +$
 $= \langle P(x), P(y) \rangle$.

De plus $\langle P(y), x \rangle = \langle P(y), P(x) \rangle$
 $= \langle P(x), y \rangle$.

→ $U \in S(E)$ et $B = B \cap N \subseteq E$.
 $A = \text{Mat}(U, B) \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$
 $\Rightarrow A$ est Hermitien dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda v \in A$
 $\Rightarrow \exists X \in \Pi_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.
 $\overline{AX} = \overline{\lambda X} \Leftrightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$
 $\Rightarrow {}^t(\overline{AX}) = \overline{\lambda} {}^t\overline{X} \Leftrightarrow {}^t\overline{X} A = \overline{\lambda} {}^t\overline{X}$
 $\Rightarrow {}^t\overline{X} A = \overline{\lambda} {}^t\overline{X}$
 $\Rightarrow {}^t\overline{X} \underbrace{AX}_{\lambda X} = \overline{\lambda} {}^t\overline{X} X$
 $\Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) {}^t\overline{X} X = 0$
 or ${}^t\overline{X} X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$ car $X \neq 0$
 $\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$
 $\Rightarrow X_A = X_U = \text{Hermitien dans } \mathbb{R}(X)$

$\forall x, y \in E$
 $\langle Ux, y \rangle = \langle x, Uy \rangle$

$\text{Mat}(U, B)$ est Symétrique
 BON

Si P : Projection orthogonale
 alors P est une endo symétrique

• Si U : symétrique orthogonale
 alors U est endo symétrique

Si P : projecteur
 $\oplus$ endo symétrique $\Rightarrow P$: projecteur orthogonale

Soit F s.c. de E
 F stable par $U \Leftrightarrow F^\perp$ " " "

Endo symétrique
 sur un espace euclidien

$\text{Im } U \perp \text{Ker } U$
 $\text{Im } U \oplus \text{Ker } U = E$

F stable par $U \Rightarrow U|_F: F \rightarrow F$ est symétrique

$\text{Sp}(U) \subset \mathbb{R}$
 χ_U est réductible dans $\mathbb{R}[X]$
 $\forall d \neq p, E_d \perp E_p$

Théorème spectral

1. U endo symétrique $\Leftrightarrow$
2. U est diagonalisable dans une BON formée de v.p. de U
3. $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}$ ($d_i \neq d_j$)
4. $\exists P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$
 $\text{Mat}(U, B) = P \cdot D \cdot P$
 BON

① $\Rightarrow$ ③ hyp Verdoppelt

Rq. $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{d_i}$

on pose $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{d_i}$

Rq. $F = E \iff F^\perp = \{0\}$

Supposons $F \neq \{0\}$.

On a $\forall 1 \leq i \leq p, E_{d_i}$ stable par U .

$\Rightarrow F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{d_i}$ " "

$\Rightarrow F^\perp$ stable par U .

on pose $\tilde{U}: F^\perp \rightarrow F^\perp$ l'endo induit.

On a U est symétrique, alors $\tilde{U}$ symétrique.

$\Rightarrow \text{Sp}(\tilde{U}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \neq 0 \text{ v.p. de } \tilde{U}$.

$\Rightarrow \exists x \in F^\perp \setminus \{0\} \text{ tel } \tilde{U}(x) = \lambda x$.

$\Rightarrow U(x) = \lambda x \Rightarrow x \in F$.

$\Rightarrow x \in F \cap F^\perp = \{0\} \in \{abs\}$.

Donc $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{d_i}$

Exercice 9. "Série II"

1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tq. $\text{Mat}(f, B_C) = A$

On suppose $\mathbb{R}^n$ muni du produit

scalaire canonique. $\Rightarrow B_C = \text{BON}$

Donc f endo symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

D'après 6/. $\exists B' = \text{BON} \subset \mathbb{R}^n$ tq.

$\text{Mat}(f, B') = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

$$\text{Mat}(f, B_C) = P_{B_C \rightarrow B'} \text{Mat}(f, B') P_{B' \rightarrow B_C}$$

"
A.

"
D

Or B' et B_C sont des BON. de $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$P_{B' \rightarrow B_C} = P \in O_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A = P D P^T.$$

2) d'après 5 on

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \langle U(x), x \rangle.$$

a) soit $g: E \rightarrow E \times E$.

$$x \mapsto (U(x), x)$$

$$g = (U, \text{id}_E)$$

U linéaire et de $E \hookrightarrow \infty \Rightarrow U$ et id_E sont continues.

"
id "

L'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire $\Rightarrow g$ continue sur $E \times E$.

$\Rightarrow f = \langle \cdot, \cdot \rangle \circ g = \text{continue sur } E$.

b) U endo symétrique, d'après 6/.
spectral, E admet un BON pour
de U .

c) $B' = (v_i - v_m) \text{ Bonds } E$

$\forall x \in E; \quad x = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle x, v_i \rangle}_{x_i} v_i$

$\Rightarrow W(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle W(v_i)$
 $= \sum_{i=1}^n d_i \langle x, v_i \rangle v_i$

$\Rightarrow \text{first } \langle W(x), x \rangle = \langle \sum_{i=1}^n d_i \langle x, v_i \rangle v_i, \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^n d_i \langle x, v_i \rangle \cdot \left(\sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} \right)$

$= \sum_{i=1}^n d_i \langle x, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$

$(x_i = \langle x, v_i \rangle)$

$\forall i \in n; \quad d_1 \leq d_i \leq d_n$
 $\Rightarrow d_1 \|x\|^2 \leq f(x) \leq d_n \|x\|^2; \forall x \in E$

d) $\forall x \in S(0,1)$
 $d_1 = f(v_1)$
 $d_n = f(v_n)$
 $\Rightarrow \sup_{x \in S(0,1)} f(x) = d_1$
 $\sup_{x \in S(0,1)} f(x) = d_n$
 $\Rightarrow f \text{ attains its } S(0,1)$

Exercice 10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$$

A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable.

$$\chi_A(X) = (X+3)(X-3)^2$$

$$E_{-3} = \text{vect} \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_3 = \text{vect} \left(v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(w_1) = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ BOND } \mathbb{R}^3$$

Schmidt

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle \cdot w_2}{\| \cdot \|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (w_1, w_3)$ BOND E_3

Alors (w_1, w_2, w_3) BOND $\mathbb{R}^3$.
base de $\mathcal{V}_P$ de A.

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 3 & 0 \\ & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{avec } P = P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 9 "Série I"

$$\langle U(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in E \text{ (positif)}$$

$$\langle U(x), x \rangle > 0, \forall x \in E \setminus \{0\} \text{ (définie positif)}$$

$$a) \Phi_A: \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{R})$$

$$\Pi \mapsto \Phi_A(\Pi) = \Pi A + A \Pi.$$

endo.

$$b). A \in S_n(\mathbb{R}), \text{ r.q. } \Phi_A \text{ endo symétrique}$$

$$\forall \Pi, N \in \Pi_n(\mathbb{R}). \langle \Phi_A(\Pi), N \rangle$$

$$= \frac{1}{n} \text{tr}(\Phi_A(\Pi) {}^t N) = \frac{1}{n} \text{tr}((\Pi A + A \Pi) {}^t N)$$

$$= \frac{1}{n} (\text{tr}(A \Pi {}^t N) + \text{tr}(\Pi A {}^t N))$$

$$= \frac{1}{n} (\text{tr}(\Pi {}^t N A) + \text{tr}(\Pi A {}^t N))$$

$$= \frac{1}{n} \text{tr}(\Pi {}^t (\Phi_A(N))) = \frac{1}{n} \text{tr}(\Pi {}^t (N A + A N))$$

$$= \langle \Pi, \Phi_A(N) \rangle =$$

Rappel

Donc $\mathbb{R}^n$ muni $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel.

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^t A Y \rangle$$

$$\langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot Y$$

$$\begin{aligned} {}^t (AX) Y &= {}^t X {}^t A Y \\ &= \langle X, {}^t A Y \rangle \end{aligned}$$

Donc Φ_A est un endomorphisme symétrique.

3) $C \in S_n(\mathbb{R})$

" $\Rightarrow$ " hyp C définie positif

Si $x \neq 0$, $Cx = \lambda x$

$$\Rightarrow {}^t x C x = \lambda {}^t x \cdot x = \lambda \|x\|_C^2$$

$$\text{avec } \|x\|_C = \sqrt{{}^t x \cdot x}.$$

$$\Rightarrow \lambda \|x\|_C^2 > 0 \text{ or } x \neq 0 \Rightarrow \|x\|_C \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow S_p(C) \subset \mathbb{R}_+^*$$

" $\Leftarrow$ " On a C est Symétrique réel

d'après th spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel

$$C = {}^t P \cdot D \cdot P; \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \{0\}$$

$${}^t x \cdot C x = {}^t x {}^t P D P x.$$

$$= {}^t y \cdot D y \text{ avec } y = P x.$$

$$= \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \geq 0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 = 0 \Rightarrow d_i y_i^2 = 0 \forall i$$

$$\Rightarrow y_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow y = P x = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow {}^t x C x > 0.$$

$$\text{Ainsi } C \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S_p(C) \subset \mathbb{R}_+^*$$

4) hyp $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Diagonalisable. th spectral $\Rightarrow \exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$S = {}^t P D P.$$

on pose. $Q = {}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P.$

$$\Rightarrow Q^2 = S$$

Q est Symétrique et $\text{Sp}(Q) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*.$
Donc $Q \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$

b) $\forall \pi \in \Pi_n(\mathbb{R})$, on a: $\langle \Phi(\pi), \pi \rangle = \langle S\pi + \pi S, \pi \rangle.$

$$= \frac{1}{2} (\text{tr}(S\pi \cdot {}^t \pi) + \text{tr}(\pi S \cdot {}^t \pi)).$$

$$= \frac{1}{2} (\text{tr}(\Phi \pi \cdot {}^t \pi) + \text{tr}(\pi \Phi \cdot {}^t \pi)).$$

$$= \frac{1}{2} (\text{tr}(\Phi \pi \cdot {}^t \pi \Phi) + \text{tr}(\pi \Phi \cdot {}^t \pi \Phi)).$$

$$= \|\Phi \pi\|_F^2 + \|\pi \Phi\|_F^2 \geq 0$$

Rappel

Donc $\mathbb{R}^n$ muni $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel.

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^t A Y \rangle$$

$$\langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot Y.$$

$$\begin{aligned} {}^t(AX) \cdot Y &= {}^t X \cdot {}^t A Y \\ &= \langle X, {}^t A Y \rangle. \end{aligned}$$

Supposons $\|PQ\|^2 + \|QP\|^2 = 0$

$\Rightarrow \|PQ\|^2 = 0$ et $\|QP\|^2 = 0$

$\Rightarrow PQ = 0_n$ et $QP = 0_n$

Or $Q \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow 0 \notin Sp(Q)$

$\Rightarrow Q$ inversible $\Rightarrow P = 0_n$. Absurde.

$\Rightarrow \forall P \neq 0_n : \langle \Phi_S(P), P \rangle > 0$

de plus $S \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \Phi_S$ endo symétrique définie positif.

$\Rightarrow \Phi_S$ endo symétrique définie positif.

" $\Rightarrow$ " $P \in S_n(\mathbb{R})$, $(\Phi_S(P)) = (SP + PS)$

" $\Leftarrow$ " $\left\{ \begin{aligned} (\Phi_S(P)) &= \Phi_S(P) \\ \exists P, S.t. S^t P &= SP + PS \\ \Phi_S(P) &= \Phi_S(P) \end{aligned} \right.$

$\Phi_S(P) = \Phi_S(P)$

$\Phi_S(P) = \Phi_S(P)$

Φ_S est définie positif $\Rightarrow Sp(\Phi_S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow 0 \notin Sp(\Phi_S) \Rightarrow \Phi_S$ bijectif $\Rightarrow$ injectif

$\Rightarrow \Phi = P$.

c) $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

a) C symétrique réelle.

$\Rightarrow C$ est définie $\Leftrightarrow Sp(C) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{tr}(C) &= d_1 + d_2 > 0 \\ \det C &= ac - b^2 = d_1 d_2 > 0 \end{aligned} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} a+c &> 0 \\ ac-b^2 &> 0 \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow S. a > 0$ et $ac-b^2 > 0$
 $\Downarrow$
 $ac > b^2 \Rightarrow a \text{ et } c \text{ non nuls}$

$$\text{donc } a > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow a + c > 0$$

Donc (*) est vérifié

→ Si (*) est vrai: $ac > b^2 \Rightarrow a \text{ et } c \text{ sont rig}$
et $a + c > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ et } c > 0$

$$b) \pi_A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (d > 0)$$

$$\Phi_c(\pi_d) = \begin{pmatrix} 2ad & b(1+d) \\ b(1+d) & 2c \end{pmatrix}$$

$\Phi_c(\pi_d)$ est par définition positive $\Leftrightarrow$

$$(2ad)(2c) - b^2(1+d)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2 d^2 + (-2b^2 + 4ac) d - b^2 \geq 0$$

$$b^2 d^2 + (2b^2 - 4ac) d + b^2 \geq 0$$