

On considère un système d'eq.

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

avec a_i, b_i sont continues.

$$\Leftrightarrow X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$

$$(E_n) : y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

avec a_i sont continues:

$$(E_n) \Leftrightarrow (S) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$; $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Theoreme de Cauchy

Le Probleme de Cauchy.

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution

$$X \text{ solution} \Leftrightarrow X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(u)X(u) + B(u)) du$$

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y_1; \dots; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution.

$$\Rightarrow \dim(S_{H_1}) = n \quad ((H_1): y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0)$$

$$(H): X'(t) = A(t)X(t).$$

S_H l'ensemble des solutions de H est e.v. et $\dim S_H = n$
L'app: $S_H \rightarrow \Pi_{n,1}(K) (t \mapsto t)$
 $X \mapsto X(t_0)$
est un isomorphisme

$(x_1, \dots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de $(H) \Leftrightarrow$ c'est une base de S_H

Système différentiel

Système à coefficients constants

$$(H): X'(t) = A X(t)$$

$$S_H = \{ X(t) = \exp(tA) U \mid U \in \Pi_{n,1}(K) \}$$

$(v_1, \dots, v_n)$ base de $\Pi_{n,1}(K)$, alors $(e^{tA} \cdot v_1, \dots, e^{tA} \cdot v_n)$ est une base de S_H
 $\Rightarrow X(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{tA} \cdot v_k$

Si A est diagonalisable

soit $(v_1, \dots, v_n)$ base de $\Pi_{n,1}(K)$ formée de $\vec{v}_p$ de A . $\lambda_k t$
 $\Rightarrow S_H = \{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} v_k \mid \alpha_k \in K \}$

T_H
L'ensemble des solutions de (S) est:
 $\{ X(t) = X_H(t) + X_p(t) \}$
avec X_H : solution de H
 X_p : solution particulière

Méthode de variation des constantes.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système fondamental de solutions.
base de $\Pi_{n,1}(K)$

Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des fonctions dérivables - tq $\psi(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) x_k(t)$ est une solution de (S)
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k'(t) x_k(t) = B(t)$

Si A est triangulaire

on détermine $P \in GL_n(K)$ tq $A = P T P^{-1}$ (T : triangulaire)

$$(H) X'(t) = A X(t) \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} X'(t) = T P^{-1} X(t)$$

$$\Leftrightarrow Y'(t) = T Y(t) \text{ avec } Y = P^{-1} X(t)$$

on résout (H')
puis on déduit (H)

$$(E): y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

avec a, b et c sont continues sur $I \iff$

$$(S): \begin{pmatrix} y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$$

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

Alors:

y solution de $(E) \iff$

$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ solution de (S)

Théorème de Cauchy

$\forall t_0 \in I; \forall y_0, y_1 \in \mathbb{K}$

le Problème: $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Soit $(H): y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$

S_H : l'ensemble des solutions de (H) est un $\mathbb{K}$ -e.v.

$\dim S_H = 2$.

$\Phi: S_H \longrightarrow \mathbb{K}^2$

$$y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0))$$

est un isomorphisme

Equation différentielle
scalaire d'ordre 2

Wronskien:

Soit y_1, y_2 deux solutions de (H) . On définit

leur wronskien par:

$$w(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2(t)$$

Théorème

i) (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de (H) (b.u.c.d.)
 S_H

ii) $\iff \forall t \in I; w(y_1, y_2)(t) \neq 0$

iii) $\iff \exists t_0 \in I; w(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$

Méthode de variation des constantes

Soit (y_1, y_2) système fondamental de solutions de (H)

on cherche une solution particulière de (E) de la forme

$y_p(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ avec α, β dérivable et

$$\begin{cases} \alpha'(t) y_1(t) + \beta'(t) y_2(t) = 0 \\ \alpha'(t) y_1'(t) + \beta'(t) y_2'(t) = c(t) \end{cases}$$