

Equation différentielle et système différentiel

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Equation différentielle du premier ordre

Théorème

La solution générale de l'équation différentielle du premier ordre

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation (E) .

$$S_E = \{y_E(x) = y_p(x) + y_h(x)\},$$

où y_p est une solution particulière de E et y_h est la solution générale de (H) .

Résolution de l'équation homogène

Soit a une fonction continue sur I .

On considère l'équation différentielle homogène

$$(H) \quad y' + a(x)y = 0.$$

i) L'ensemble des solution de (H) est :

$$S_H = \{y_h(x) = \lambda e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{avec} \quad A(x) = \int a(x) dx.$$

ii) S_H est un IK -espace vectoriel de dimension 1.

Méthode de variation de la constante

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}.$$

En remplaçant y_p dans l'équation différentielle (E) , on obtient

$$\lambda'(x) = \frac{b(x)}{e^{-A(x)}} = b(x)e^{A(x)}.$$

Théorème de Cauchy- Lipshitz

Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \delta \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in I \end{cases}$$

admet une solution unique.

Remarque

On considère $x_0 \in I$, $(F) : y'(t) + a(t)y = b(t)$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) telles que

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \text{ alors } y_1 = y_2$$

Equation différentielle linéaire d'ordre 2

Proposition

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$(E) : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

où a , b et c sont des fonctions continues sur l'intervalle I à valeurs dans IK . Alors

$S_E = \{y_E(t) = y_0(t) + y_h(t)\}$,
où y_0 est une solution particulière de E et y_h est la solution générale de (H)

Théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère $t_0 \in I$, x_0 et x_1 dans IK , alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

admet une solution unique.

Remarque

On considère $t_0 \in I$, $(E) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$
Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) telles que
 $y_1(t_0) = y_2(t_0)$
et
 $y_1'(t_0) = y_2'(t_0)$
alors $y_1 = y_2$

Théorème

On considère $(H) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, $t_0 \in I$ et S_H est l'espace des solutions de E , alors

1) L'application $\psi : S_H \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme.

2) S_H est un IK -espace vectoriel de dimension 2.

Worskien

On considère $(H) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$, $t \in I$,
 y_1 et y_2 deux solutions de (H) .
• On dit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (H) si (y_1, y_2) est une base (H) .

Worskien de (y_1, y_2) : $W(y_1, y_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$ est appelé

Théorème

Soit (y_1, y_2) des solutions de (H) alors on a équivalence entre

- 1) (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (H)
- 2) $W(y_1, y_2)(t) \neq 0, \forall t \in I$
- 3) il existe $t_0 \in I$ tel que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.

Méthode de variation des constantes

On considère $(E) : y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

Si (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de (H) ,
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$$

avec α' et β' sont solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha'(t)y_1(t) + \beta'(t)y_2(t) = 0 \\ \alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Alors

$$\alpha'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ c(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} \quad \text{et} \quad \beta'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)}$$

0.1 Equation différentielle linéaire à coefficients constants

Résolution de l'équation homogène

On considère l'équation différentielle linéaire homogène de second ordre à coefficients constants

$$(E_h) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

On associe à cette equation une équation caractéristique :

$$(E_c) \quad ar^2 + br + c = 0 \quad \text{et on note} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Alors l'ensemble des solutions de (E_h) est donné par :

Résolution dans $\mathbb{C}$.

On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

• Si $\Delta \neq 0$:

On note r_1 et r_2 les deux racines complexes distincts de l'équation caractéristique (E_c) , alors

$$S_h = \{y(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}, \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $\Delta = 0$:

On note r_0 la racine double de l'équation caractéristique (E_c) , alors

$$S_h = \{y(t) = (\alpha t + \beta)e^{r_0 t}, \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Résolution dans $\mathbb{R}$:

On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

• Si $\Delta \neq 0$:

On note r_1 et r_2 les deux racines réelles distincts de l'équation caractéristique (E_c) , alors

$$S_h = \{y(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}, \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $\Delta = 0$:

On note r_0 la racine double de l'équation caractéristique (E_c) , alors

$$S_h = \{y(t) = (\alpha t + \beta)e^{r_0 t}, \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \delta + i\mu$ et $r_2 = \delta - i\mu$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique (E_c) , alors

$$S_h = \{y(t) = \alpha e^{\delta t} (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t)), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Solution particulière lorsque le second membre est $f(t) = P(t)e^{mt}$

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}, \quad m \in IK \text{ et } P \in IK[X].$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = \begin{cases} Q(t)e^{mt} & \text{si } m \text{ n'est pas une racine de } E_c \\ tQ(t)e^{mt} & \text{si } m \text{ est une racine simple de } E_c \\ t^2Q(t)e^{mt} & \text{si } m \text{ est une racine double de } E_c \end{cases}$$

avec
deg Q = deg P

Solution particulière lorsque le second membre est $A \cos(\omega t)$ ou $B \sin(\omega t)$

On considère l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = A \cos(\omega t)$ ou $(B \sin(\omega t))$.

On recherche une solution particulière réelle de l'équation (E) sous la forme

$$y_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

Principe de superposition des solutions

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : a(t)x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)$$

On pose pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(E_i) : a(t)x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_i(t)$$

On détermine une solution particulière f_i de (E_i) , alors

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \text{ est une solution particulière de } (E).$$

Système différentiel linéaire

Soient $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ n^2 -fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $b_i, 1 \leq i \leq n$, n -fonctions continues. Un système différentiel linéaire (S) est :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

où $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

• X est une solution de (H) s'il est dérivable ($\forall 1 \leq i \leq n$ x_i est dérivable sur $\mathbb{R}$) et vérifie le système (H) .

Remarque

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$(E) x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, on peut transformer (E) en un système différentiel du premier ordre

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Théorème

On considère le système différentiel linéaire :

$$(E) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

On lui associe un système différentiel linéaire homogène :
 $(H) \quad X'(t) = A(t)X(t)$. Alors

$$S_E = \{X_E(t) = X_p(t) + X_h(t)\},$$

où X_p est une solution particulière de E et X_h est la solution générale de (H) .

ii) L'ensemble des solutions du système différentiel homogène S_H est un IK -espace vectoriel de dimension n .

Théorème de Cauchy-Lipshitz

Soient $t_0 \in I$ et $X_0 \in IK^n$, alors le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une solution unique.

Définition

On considère le système différentiel linéaire homogène :

$$(H) \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

On dit que $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (H) s'il forme une base (H) .

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des solutions de (H) .

$$W(X_1, \dots, X_n) : I \longrightarrow IK$$

$$t \longmapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

• L'application

est appelé Worskien de $(X_1, \dots, X_n)$.

Théorème

On considère le système différentiel linéaire homogène :

$$(H) \quad X'(t) = A(t)X(t).$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des solutions de (H) . Alors on a équivalence entre

1) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (H)

2) $W(X_1, \dots, X_n)(t) \neq 0, \forall t \in I$

3) il existe $t_0 \in I$ tel que $W(X_1, \dots, X_n)(t_0) \neq 0$.

Méthode de variation des constantes

On considère le système différentiel linéaire :

$$(S) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solution de (H) .
 On cherche une solution particulière de (S) sous la forme

$$X_0(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) X_i(t)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \\ \vdots \\ \alpha'_n(t) \end{pmatrix}$$

est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha'_1(t)x_{11}(t) + \alpha'_2(t)x_{12}(t) + \dots + \alpha'_n(t)x_{1n}(t) = b_1(t) \\ \alpha'_1(t)x_{21}(t) + \alpha'_2(t)x_{22}(t) + \dots + \alpha'_n(t)x_{2n}(t) = b_2(t) \\ \vdots \\ \alpha'_1(t)x_{n1}(t) + \alpha'_2(t)x_{n2}(t) + \dots + \alpha'_n(t)x_{nn}(t) = b_n(t) \end{cases}$$



Puisque le Worskien $W(X_1, \dots, X_n)(t) \neq 0$, alors

$$a_i'(t) = \frac{\det(X_1(t), \dots, X_{i-1}(t), B(t), X_{i+1}(t), \dots, X_n(t))}{W(X_1, \dots, X_n)(t)}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

Système différentiel linéaire à coefficients constants

Exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_n(IK)$.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge. On pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

Soit $A, B \in M_n(IK)$.

- 1) $e^0 = I_n, e^A = eI_n$.
- 2) Si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
- 3) Si $B = PAP^{-1}$, alors $\exp(B) = P\exp(A)P^{-1}$.
- 4) Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- 5) Si T est triangulaire de termes diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(T)$ est triangulaire de termes diagonaux $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Proposition

Soit $A \in M_n(IK)$.

L'application $g : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = A\exp(tA)$$

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système

$$(H) : X'(t) = AX(t)$$

- 1) X solution de $(H) \iff X(t) = \exp(tA)U, U \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.
- 2) Si $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$, alors la famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de l'espace des solutions S_H de H avec $X_k(t) = \exp(tA)V_k$.

$$\varphi \text{ est une solution de } (H) \iff \varphi(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \exp(tA)V_k$$

Résolution lorsque A est diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, alors l'ensemble des solutions du système

$$(H) : X'(t) = AX(t)$$

$$\text{est } S_H = \left\{ X(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k, \alpha_k \in IK \right\} \quad \text{avec}$$

$(V_1, \dots, V_n)$ est une base de vecteurs propres de A associées respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Notons $X_k(t) = e^{\lambda_k t} V_k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de l'espace des solution S_H

Résolution lorsque A est trigonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on considère le du système

$$(S) : X'(t) = AX(t)$$

Si A est trigonalisable, on détermine une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$, alors

$$(S) \iff P^{-1}X'(t) = TPX(t) \iff (S') : Y'(t) = TY(t).$$

avec $Y(t) = P^{-1}X(t)$ On résout (S') et on détermine $Y(t)$