

Problème 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad t \in I$$

avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(IK)$ et $B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(IK)$ et l'équation différentielle homogène associée

$$(E_0) : X'(t) = A(t)X(t).$$

On note S_0 l'espace vectoriel de dimension n des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) et on considère $X_1, \dots, X_n$ un système fondamentale de solutions de (E_0) . Pour $t \in I$, on note $W(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ la matrice wronskienne en t c'est la matrice formée par les composantes des vecteurs $X_i(t)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(IK)$.

1. Soit $t_0 \in I$, on pose
- $$\Phi_{t_0} : S_0 \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(IK)$$
- $$X \longmapsto X(t_0)$$

Justifier que Φ_{t_0} est un isomorphisme.

2. Soit $t_0, t \in I$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(IK)$. On considère $X \in S_0$ la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

Vérifier que $(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t)$.

3. a) Vérifier que pour tout $t \in I$, $W(t)$ est inversible.

b) Soit $t_0, t \in I$, on pose $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$.

Montrer que la matrice $R(t, t_0)$ ne dépend pas système fondamentale $(X_1, \dots, X_n)$ choisi.

La matrice $R(t, t_0)$ s'appelle résolvante de l'équation différentielle linéaire (E_0) .

Soit

4. a) Soit $t_0 \in I$, montrer que $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \forall t \in I$.

b) En déduire que pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(IK)$ le vecteur

$t \longmapsto X(t) = R(t, t_0)V$ est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

5. Soit t, t_0, t_1 et t_2 dans I . Montrer que $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$. En déduire $R(t, t_0)$ est inversible et donner son inverse.

6. Soit $t_0, t \in I$. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$X(t) = R(t, t_0)V(t)$$

où V est une application dérivable sur I à déterminer.

a) Montrer que X est une solution de (E) , alors $R(t, t_0)V'(t) = B(t)$.

b) Dédire une solution particulière de (E) .

Needra Moalla