

Problème 2
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ - on considère l'équation différentielle :
(E): $X'(t) = A X(t)$.

On note S_E le sous espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formé des solutions de (E).

On rappelle que si $X_0 \in \mathbb{C}^n$, alors l'application $\varphi : t \mapsto e^{tA} X_0$ est l'unique solution de (E) vérifiant $\varphi(0) = X_0$.

Question préliminaire.

On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A deux à deux distincts. de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$.

Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$.

Partie I.

1) On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Sans diagonaliser A calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $(tA)^{2k}$ et $(tA)^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Déduire e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$.

c) Déduire dans ce cas que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose dans cette question que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et que $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{ia, a \in \mathbb{R}\}$.

a) Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et V un vecteur propre associé à λ .

Montrer soigneusement que $e^{tA}V = e^{\lambda t}V$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Soit $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée des vecteurs propres de A et on considère les fonctions $\varphi_k : t \mapsto e^{tA}V_k$, $1 \leq k \leq n$.

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_E .

c) En déduire que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

3) Dans cette question, on suppose que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Soit λ une valeur propre complexe de A et V_0 un vecteur propre associé à λ .

a) En considérant la solution de (E) telle que $\varphi(0) = V_0$, montrer que $Re(\lambda) = 0$.

b) Soit $W \in \ker(A - \lambda I_n)^2$ et $V = (A - \lambda I_n)W$.

i) Montrer que $e^{tA}W = e^{\lambda t}(W + tV)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

ii) Montrer que $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

iii) En déduire que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Partie II.

On considère une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que si $\forall X \in S_E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$, alors $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ on a $Re(\lambda) < 0$.

On considère dans la suite $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A deux à deux distincts. de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$ et on suppose que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $Re(\lambda_i) < 0$.

2. Soit $U \in \mathbb{C}^n$, on écrit $U = U_1 + \dots + U_r$ où $U_i \in \ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i}) \forall i \in \{1, \dots, r\}$.

3. Vérifier que $e^{t(A - \lambda_i I_n)}U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$.

4. En déduire que pour tout réel t :

$$e^{tA}U_i = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

5. Justifier l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(A - \lambda_i I_n)^k U_i\| \leq C \|U_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, m_i - 1\}.$$

6. Montrer alors que pour tout réel t :

$$\|e^{tA}U_i\| \leq C e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} (1 + |t|)^{m_i-1} \|U_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\},$$

et en déduire que :

$$\|e^{tA}U\| \leq C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|U_i\|$$

7. Conclure que toute solution de E tend vers 0 en $+\infty$.