

Problème 3 "Système différentiel"

Notation

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$.
- Si I est un intervalle réel non réduit à un point, on note $C^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est noté :

$$X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$$

où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k .

- Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. Dans ce problème, on s'intéresse au système différentiel :

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (E)$$

où $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une application de classe C^1 .

Partie I

1. Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et la structure de l'ensemble des solutions de (E) .
2. Vecteurs propres communs

On suppose qu'il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{C}^n$ et une fonction continue $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait :

$$A(t)V = \lambda(t)V.$$

Montrer que la fonction :

$$X : I \rightarrow \mathbb{C}^n \quad t \mapsto \alpha(t)V$$

est solution de (E) si, et seulement si, la fonction α est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera et pour laquelle on donnera une expression des solutions.

3. Un premier exemple.

On suppose pour cette question que $n = 2$. Soient a et b deux complexes tels que $a - 1 - b \neq 0$. On suppose que, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .

4. Un deuxième exemple

On suppose également pour cette question que $n = 2$. Soient μ une constante complexe et a, b des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$, la fonction b ne s'annulant jamais sur I . On suppose que pour tout réel $t \in I$, on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \mu b(t) \\ b(t) & a(t) + (\mu - 1)b(t) \end{pmatrix}.$$

a) Traiter le cas particulier où $\mu = 1$.

b) Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls V_1 et V_2 dans $\mathbb{C}^2$ et deux fonctions continues λ_1 et λ_2 de I dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait :

$$A(t)V_1 = \lambda_1(t)V_1 \quad \text{et} \quad A(t)V_2 = \lambda_2(t)V_2.$$

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t).$$

On supposera cette condition vérifiée pour la question suivante.

d) Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .

Partie II

On se donne une norme vectorielle $X \mapsto \|X\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on lui associe la fonction N définie sur $M_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

1. a) Montrer que l'application N définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que, pour toutes matrices A et B dans $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

2. Développement en série entière des solutions.

a) On suppose pour cette question que $I = \mathbb{R}$ et que la matrice A est constante.

Montrer que si X est solution de (E) , elle est alors de classe C^∞ sur I et que pour tout entier naturel k , on a :

$$X^{(k)}(t) = A^k X(t) \quad (\text{avec la convention que } X^{(0)} = X \quad \text{et} \quad A^0 = I_n).$$

II.2.2 On note $X_0 = X(0)$. Montrer que pour tout entier naturel p et tout réel $t \in I$, on a :

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0 + \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} A^{p+1} X(u) du.$$

II.2.3 Montrer que :

$$X(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) \quad \text{et que les coordonnées de } X(t) \text{ se développent en série entière sur } \mathbb{R}.$$