

1/2

000000

Problème 1

$$\forall t_0 \in I: \Phi_{t_0}: S_0 \xrightarrow{\quad} \pi_{n,1}(K) \\ x \mapsto x(t_0)$$

Soit x_1 et $x_2 \in S_0$, $\lambda \in K$.

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0}(\lambda x_1 + x_2) &= (\lambda x_1 + x_2)(t_0) \\ &= \lambda x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ &= \lambda \Phi_{t_0}(x_1) + \Phi_{t_0}(x_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_{t_0}$ est linéaire.

D'après le th de Cauchy-Lipschitz :

$\forall v \in \pi_{n,1}(K) \exists ! x$ solution de (E_0) tq.

$$x(t_0) = v.$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \pi_{n,1}(K), \exists ! x \in S_0 \text{ tq } \Phi_{t_0}(x) = v.$$

$\Leftrightarrow \Phi_{t_0}$ est bijective.

$\Rightarrow \Phi_{t_0}$ est un isomorphisme

$$\forall v \in \pi_{n,1}(K) \text{ tq. } x(t_0) = v \Leftrightarrow \Phi_{t_0}(x) = v.$$

$$(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(v) = \Phi_t(x) = x(t)$$

$$\exists \text{ on a. } B(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } S_0 \\ \text{et } B_0(e_1, \dots, e_n) \text{ la base canonique de } \pi_{n,1}(K)$$

$\Rightarrow \Phi_t$ est un isomorphisme $\Rightarrow$.

$$\text{Mat}(\Phi_t, B, B_0) = \text{inversible} \\ \parallel \\ W(t)$$

$$b) t_0, t \in I. \\ R(t, t_0) = W(t) (W(t_0))^{-1}.$$

$$\begin{aligned} &= \text{Mat}(\Phi_t, B_0, B_0) \cdot (\text{Mat}(\Phi_{t_0}, B, B_0))^{-1} \\ &= \text{Mat}(\Phi_t, B, B_0) \cdot \text{Mat}(\Phi_{t_0}^{-1}, B_0, B) \\ &= \text{Mat}(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}; B_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow R(t, t_0)$ ne dépend pas. du système fondamentale choisi.

$$4) a) R(t, t_0) = W(t) (W(t_0))^{-1}.$$

On a. $W(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ avec x_i est dérivable, $\Rightarrow W$ est dérivable.

De plus. L'app. $\pi \mapsto \pi \cdot (W(t_0))^{-1}$ est linéaire, alors. $t \mapsto R(t, t_0)$ est dérivable.

$$\text{et } (R(t, t_0))' = W'(t) (W(t_0))^{-1}.$$

comme. $x_i'(t) = A(t) \cdot x_i(t)$, alors

$$W'(t) = A(t) W(t) \Rightarrow R'(t, t_0) = A(t) \cdot R(t, t_0)$$

$$b) x(t) = R(t, t_0) V. \\ x'(t) = R'(t, t_0) \cdot V. \quad (\text{car } \pi \mapsto \pi \cdot V \text{ linéaire})$$

$$= A(t) R(t, t_0) V = A(t) x(t).$$

$\Rightarrow x$ solution de (E_0) et vérifie

$$x(t_0) = R(t_0, t_0) V = V.$$

$$\begin{aligned} 5) R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) &= \omega(t_2) \omega(t_1)^{-1} \omega(t_1) \omega(t_0) \\ &= \omega(t_2) \omega(t_0)^{-1} \\ &= R(t_2, t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(t, t_0) \cdot R(t_0, t) &= R(t, t) = I_n \\ \Rightarrow R(t, t_0) \text{ est inversible et } (R(t, t_0))^{-1} &= R(t_0, t) \end{aligned}$$

6) $x(t) = R(t, t_0) V(t)$ une solution de (E) sous la forme. $x(t) = R(t, t_0) V(t)$ avec V dérivable.

on a $t \mapsto R(t, t_0)$ et $t \mapsto V(t)$ sont dérivables sur I et l'app $(\pi, V) \rightarrow \pi \cdot V$ est bien écrite, alors x est dérivable sur I et

$$x'(t) = R'(t, t_0) V(t) + R(t, t_0) \cdot V'(t)$$

$$\Rightarrow x'(t) = A(t) \widetilde{R(t, t_0)}^{x(t)} V(t) + R(t, t_0) V'(t)$$

Comme $x'(t) = A(t) x(t) + B(t)$

$$\Rightarrow R(t, t_0) V'(t) = B(t)$$

b) On déduit que $V'(t) = (R(t, t_0))^{-1} B(t)$

$$= R(t_0, t) B(t).$$

$$\Rightarrow V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du + cte.$$

On choisit, $V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du$

c) $y(t) = R(t_0, t) \cdot V(t)$ est une solution particulière de (E).

$$y(t) = R(t_0, t).$$