

Problème d'après NP 2020

Question préliminaire

$d_1, d_2, \dots, d_n$ les v.p de A deux à deux
avec $\text{mul}(d_i) = m_i$

Alors $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - d_i)^{m_i}$

les poly $(X - d_i)^{m_i}$ sont deux à deux

premiers entre eux. Alors d'après le lem.
de décomposition des noyaux.

$$\ker \prod_{i=1}^n (X - d_i)^{m_i}(A) = \bigoplus_{i=1}^n \ker (A - d_i I)^{m_i}$$

D'après le th de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$
 $\Rightarrow \ker \chi_A(A) = \{0\}$

Ainsi $E = \bigoplus_{i=1}^n \ker (A - d_i I)^{m_i}$

Partie I

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $(tA)^{2k} = t^{2k} \cdot A^{2k}$

or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

Alors $(tA)^{2k} = t^{2k} (-I_2)^k = (-1)^k t^{2k} I_2$

et $(tA)^{2k+1} = t^{2k+1} \cdot A \cdot (-1)^k I_2 = (-1)^k t^{2k+1} A$

b) $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A$$

$$= \cos t I_2 + \sin t A$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Soit φ une solution de (E): $x'(t) = A x(t)$
alors $\exists x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $\varphi(x) = e^{tA} x_0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos t)x_0 - (\sin t)y_0 \\ (\sin t)x_0 + (\cos t)y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\|_2 = \max(|(\cos t)x_0 - (\sin t)y_0|, |(\sin t)x_0 + (\cos t)y_0|) \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \|x_0\|_2$$

Alors φ est borné.

2) A est diagonalisable et $\text{sp}(A) \subset \{ia, -ia\}$

a) v vecteur propre de A associé à d

$$\Leftrightarrow Av = d v$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; A^n v = d^n v$$

$$e^{tA} v = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) v$$

$$= \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} \right) \cdot v$$

comme l'app $f: \Pi \mapsto M v$ est continue
puisque elle est linéaire sur $\Pi_n(\mathbb{C})$
qui est de dimension finie.

$$\text{Alors } e^{tA} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} v \right) \\ = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \left(\frac{t^k d^k}{k!} v \right) \\ = e^{t d} \cdot v.$$

b) Soit $B: (v_1, v_2, \dots, v_n)$ base de $\mathbb{C}^n$
form. des vecteurs propres de A .
 $\forall t \in \mathbb{R}; \quad \varphi_k(t) = e^{tA} v_k = e^{t \lambda_k} v_k$

Soit φ une solution de (E), alors
il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tq $\varphi(t) = e^{tA} x$.

Puisque B est une base de $\mathbb{C}^n$, alors
il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tq.

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k.$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = e^{tA} x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{t \lambda_k} v_k$$

$$\Rightarrow = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{t \lambda_k} v_k.$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)$$

Ce qui montre que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est
une famille génératrice de S_E .

Comme $\dim S_E = n = \text{Card}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

Alors $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ base de S_E .

On a, $\forall \varphi$ solution de E.

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t)$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \cdot \|\varphi_k(t)\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \cdot |e^{t \lambda_k}| \cdot \|v_k\|$$

$$\text{Or } \lambda_k \in \{i a, a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow |e^{t \lambda_k}| = 1$$

$$\text{D'où } \|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \cdot \|v_k\|; \forall t \in \mathbb{R}$$

Ce qui montre que φ est bornée.

3) hyp, toutes les solutions de
(E) sont bornées

φ est v.p. de A et $V_0 \neq 0$ tq $AV_0 = \lambda V_0$

a) φ solution de (E) tq $\varphi(0) = V_0$

$$\Leftrightarrow \varphi(t) = e^{tA} V_0 = e^{t\lambda} \cdot V_0$$

$$\text{Alors } \|\varphi(t)\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \|V_0\|$$

Comme φ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$$\operatorname{Re} \lambda = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{sinon} \cdot \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t)\| = +\infty \\ \cdot \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t)\| = +\infty \end{array} \right)$$

b) $w \in \ker(A - \lambda I_n)^2$ et $v = (A - \lambda I_n)w$

$$e^{tA} w = (e^{tA - \lambda t I_n + \lambda t I_n}) w$$

$$= e^{t(A - \lambda I_n)} \cdot e^{\lambda t I_n} w$$

($t(A - \lambda I_n)$ et $\lambda t I_n$ commutent)

$$= e^{t(A - \lambda I_n)} \cdot e^{\lambda t} w$$

$$= e^{\lambda t} \left[(e^{t(A - \lambda I_n)}) w + \frac{t}{1!} (e^{t(A - \lambda I_n)})^2 w + \frac{t^2}{2!} (e^{t(A - \lambda I_n)})^3 w + \dots \right]$$

Comme $w \in \ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)^k \quad \forall k \geq 2$
alors

$$\frac{e^{t(A - \lambda I_n)} w}{k!} = 0; \quad \forall k \geq 2$$

Ainsi:

$$e^{tA} w = e^{\lambda t} (w + t v)$$

ii.) Soit $w \in \ker(A - \lambda I_n)^2$.

$\varphi(t) = e^{tA} w$ est une solution de (E)

Alors elle est bornée par hypothèse.

$$\text{Or } \|\varphi(t)\| = \|e^{tA} w\| = \|e^{\lambda t} (w + t v)\|$$

$$= e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \|w + t v\| \quad (\operatorname{Re} \lambda = 0)$$

$$= \|w + t v\|$$

Si $v \neq 0$, alors $\|w + t v\| \geq \|w\| - t \|v\|$

$$\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{+}$$

Ce qui est absurde

Alors $v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)w = 0$

et par suite $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$

iii.) Puisque $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$

et on a: $\ker(A - \lambda I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)^2$

alors $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A - \lambda I_n)^k, \quad \forall k \geq 2$

D'autre part on a:

$$E^n = \bigoplus_{k=1}^n \ker(A - \lambda_k I_n)^{m_k}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \bigoplus_{k=1}^n \ker(A - \lambda_k I_n) \\ &= \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k} \end{aligned}$$

Ce qui montre que A est diagonalisable

Partie II

1) Si $X \in S_E$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$

Soit V un vecteur propre de A
associé à $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors

$\varphi(t) = e^{tA} V$ est une solution de (E)

$$\text{or } \varphi(t) = e^{t\lambda} V$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \|V\|$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \|V\| = 0$$

alors $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

$$2) \text{ On a } \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^n \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$$

On considère $U \in \mathbb{C}^n$, alors

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

avec $U_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$

$$\begin{aligned} e^{t(A - \lambda_i I_n)} U_i &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t(A - \lambda_i I_n))^k}{k!} U_i \\ &= \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i + \sum_{k=m_i}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i \end{aligned}$$

puisque $U_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i} \subseteq \ker(A - \lambda_i I_n)^k$
 $\forall k \geq m_i$

$$\Rightarrow (A - \lambda_i I_n)^k U_i = 0 \quad \forall k \geq m_i$$

D'où

$$e^{t(A - \lambda_i I_n)} U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i$$

4) soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA} U_i &= e^{t(A - \lambda_i I_n) + t\lambda_i I_n} U_i \\ &= e^{t\lambda_i} e^{t(A - \lambda_i I_n)} U_i \\ &= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i \end{aligned}$$

5) on a l'application

$$f_i: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$X \mapsto f_i(X) = (A - \lambda_i I_n)^k X$$

est linéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui est de dimension finie, alors

$i \in \{1, \dots, r\}$: f_i est continue.
 alors il existe une constante $C_i \in \mathbb{R}$

tg $\|f_i(x)\| \leq C_i \|x\|$; $\forall x \in \mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow \|(A - \lambda_i I_n)^k x\| \leq C_i \|x\|$, $\forall x$

On pose $C = \max \{C_i; 1 \leq i \leq r\}$

$\Rightarrow \|(A - \lambda_i I_n)^k x\| \leq C \|x\|$; $\forall x$

$\|(A - \lambda_i I_n)^k u_i\| \leq C \|u_i\|$; $\forall i \leq r$

6) D'après les questions 4 et 5:

$\|e^{tA} u\| \leq C \cdot e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} \|u_i\|$

$\leq C \cdot e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \|u_i\| \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(m_i-1)! |t|^k}{(m_i-1-k)! k!} \right)$

$\leq C \cdot e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \|u_i\| \cdot \sum_{k=0}^{m_i-1} C \frac{k! |t|^k}{m_i-1-k!}$

$\leq C \cdot e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \|u_i\| (1+|t|)^{m_i-1}$

* Soit $u \in \mathbb{C}^n$; $u = u_1 + u_2 + \dots + u_r$

$e^{tA} u = e^{tA} \sum_{i=1}^r u_i$

$= \sum_{i=1}^r e^{tA} u_i$

$\Rightarrow \|e^{tA} u\| \leq \sum_{i=1}^r \|e^{tA} u_i\|$

$\leq C \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} (1+|t|)^{m_i-1} \|u_i\|$

$\leq C \cdot \max_{(i \leq r)} \|u_i\| (1+|t|)^{n-1} \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)}$

$(m_i \leq n)$

puisque $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$

D'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1+|t|)^{n-1} e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} = 0$

D'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA} u\| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} u = 0$