

Problème "Concours 2020" "1.4"

$$(E): X'(t) = A \cdot X(t)$$

$$1) \quad \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - d_i I_n)^{m_i}$$

$$2) \quad \Pi_q \ker(A - d_i I) = \ker(A - d_i I_n) \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

" $\Rightarrow$ " $\{ \lambda_i \}_{i=1}^r$; $\ker(A - d_i I) = \ker(A - d_i I)$

D'où $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - d_i I)$

"D'où A est diagonalisable."

$\Leftarrow$ "D'où A est diagonalisable."

$$\Pi_n(x) = \prod_{i=1}^r (x - d_i)^{m_i}$$

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{d_i}(x)$$

soit $1 \leq j \leq r$; $(x - d_j) \cdot \Pi_n(x)$ est un polynôme annulateur

$$= \prod_{i=1, i \neq j}^r (x - d_i) (x - d_j)^{e_j}$$

hence the decomposition of the matrix

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{d_i} \oplus \ker(A - d_j I_n)^{e_j}$$

$\Rightarrow$ d'où $\ker(A - d_j I_n)^{e_j} = n - \sum_{i=1, i \neq j}^r \dim E_{d_i}$

$\Rightarrow \ker(A - d_j I_n) \subset \ker(A - d_j I_n)^{e_j} = \ker(A - d_j I_n)$

$\Rightarrow \ker(A - d_j I_n) = \ker(A - d_j I_n)^{e_j}$

Aufremut

A ist diagonalisierbar, also $\exists P \in GL_n(K)$.

$$A = P \begin{pmatrix} d_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n I_{m_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow (A - d_1 I_n) = P \begin{pmatrix} 0 & (d_2 - d_1) I_{m_2} & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & (d_n - d_1) I_{m_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\operatorname{rg}(A - d_1 I_n) = n - m_1$$

$$\Rightarrow (A - d_1 I_n)^e = P \begin{pmatrix} 0 & (d_2 - d_1)^e I_{m_2} & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & (d_n - d_1)^e I_{m_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A - d_1 I_n)^e = n - m_1$$

$$\Rightarrow \dim \ker(A - d_1 I_n) = \dim \ker(A - d_1 I_n)^e$$

Partie I.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$

3) X solution de (E) $\Leftrightarrow X(t) = e^{tA} X_0$
 $\|X(t)\| = \|e^{tA} X_0\|$

$= \left\| \begin{pmatrix} \cosh t x + \sinh t y \\ \sinh t x + \cosh t y \end{pmatrix} \right\|$

$\| \cosh t X_0 + \sinh t (AX_0) \| \leq \|X_0\| + \|AX_0\|$
 $\Rightarrow X$ est bornée.

e) A est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n(\mathbb{R})$
 $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{ia, a \in \mathbb{R}\}$

a) $\forall v \in A, Av = \lambda v$

$e^{tA} \cdot v = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right) v$

$\varphi: \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{C}) \quad (v \in \Pi_n(\mathbb{C}))$
 $\Pi \mapsto \Pi \cdot v$

φ est linéaire et de $\Pi_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \Pi_n(\mathbb{C})$
 $\Rightarrow \varphi$ est continue.

$e^{tA} \cdot v = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!} \right) \cdot v$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^n \frac{(A)^j}{j!} \right) \cdot v$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \cdot v$

$= e^{tA} \cdot v$

b) $\varphi_k(t) = e^{t d_k} V_k$.

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base of SE .

c) φ solution de $(E) \cdot (\cdot)$. $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ (can. B base of SE)

$\Rightarrow \varphi(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{t d_k} V_k, \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |e^{t d_k}| \|V_k\|$

or $d_k \in \{i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow |e^{t d_k}| = 1$.

$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|V_k\|, \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \varphi$ solution de (E) alors φ est bornée.

a) $AV_0 = d V_0$.

$\varphi(t) = e^{tA} V_0$ est une solution de E

$= e^{t d} V_0$

φ est bornée $\Rightarrow \|e^{t d} V_0\|$ est bornée.

$\Rightarrow t \mapsto e^{Re(d)t} V_0$ est bornée sur $\mathbb{R}$
 $\text{Supp } Re(d) \neq 0 \Rightarrow$

$\|\varphi(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \pm \infty]{} +\infty$ abs.

$\Rightarrow \underline{Re(d) = 0}$

b) soit $w \in \ker(A - \lambda I_n)^r \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)^r w = 0$
 $v = (A - \lambda I_n)w \Rightarrow (A - \lambda I_n)v = 0$

i) $e^{tA} \cdot w = e^{t(A - \lambda I_n + \lambda I_n)} w$
 $= e^{t\lambda} \cdot e^{t(A - \lambda I_n)} w$

$= e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t(A - \lambda I_n))^k}{k!} w$

$= e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t(A - \lambda I_n))^k}{k!} w$

$= e^{t\lambda} \left(w + t(A - \lambda I_n)w + \dots \right)$

$= e^{t\lambda} \|w + t(A - \lambda I_n)w + \dots\|$

ii) $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$
 soit $w \in \ker(A - \lambda I_n)$, mg $w \in \ker(A - \lambda I_n)$
 $\Downarrow$

$\ker(A - \lambda I_n)w = 0$
 $\ker v = 0$

Supposons q. $v \neq 0$

ona $t \mapsto e^{tA} \cdot w$ est solution de (E)
 $\Rightarrow$ borne $\Rightarrow t \mapsto e^{t\lambda} (w + tv)$

or $\|e^{t\lambda} (w + tv)\| \geq e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} (\|w\| + t\|v\|)$
 $\geq |t| (\|v\| - \|w\|)$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} \cdot w\| = \infty$
 $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow w \in \ker(A - \lambda I_n)$

Ans: $\ker(A - \lambda I_n)^2 = \ker(A - \lambda I_n)$

5) $\forall i \in \{1, \dots, r\}$; la fonction.

$$f: \pi_{n_k}(\mathbb{C}) \rightarrow \pi_{n_k}(\mathbb{C})^k$$

$$x \mapsto (A - d_i I_n) X.$$

est linéaire
 $\{ \pi_{n_k}(\mathbb{C}) \leq \infty \} \Rightarrow$ continue

Donc $\exists C \geq 0$ tq $\|f_k(x)\| \leq C \|x\|$
 $\forall x \in \pi_{n_k}(\mathbb{C})$

soit $C = \max \{ C_{k,i}; k \leq r, i \in \{0, \dots, m_k-1\} \}$

$$\Rightarrow \| (A - d_i I_n)^k x \| \leq C \|x\|, \forall x$$

$$\Rightarrow \| (A - d_i I_n)^k u_i \| \leq C \|u_i\| \quad \forall k, \forall i$$

$$\|e^{tA} u_i\| = \|e^{t d_i} \sum_{k=0}^{m_k-1} \frac{t^k (A - d_i I_n)^k}{k!} u_i\|$$

$$\leq e^{t \operatorname{Re}(d_i)} \sum_{k=0}^{m_k-1} \frac{|t|^k}{k!} \|u_i\|$$

$$\leq C e^{t \operatorname{Re}(d_i)} \sum_{k=0}^{m_k-1} \frac{|t|^k}{k!} \|u_i\|$$

$$\leq C e^{t \operatorname{Re}(d_i)} (1 + |t|)^{m_k-1} \|u_i\|$$

$$\|e^{tA} u\| = \|e^{tA} (u_1 + \dots + u_r)\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^r \|e^{tA} u_k\|$$

$$\leq C \sum_{k=1}^r (e^{t \operatorname{Re}(d_k)} (1 + |t|)^{m_k-1} \|u_k\|)$$

$$\leq C (1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^r e^{t \operatorname{Re}(d_k)} \right) x$$

$\operatorname{Re} d < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} u\| = 0$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} u\| = 0$

$\max_{1 \leq k \leq n} \|u_k\| = 0$

Partie II:

$$1) \forall X \in SE. \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$$

$$\text{sat } d \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \exists V \neq 0 \text{ s.t. } AV = dV$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} \cdot V\| = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{t d} \cdot V\| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t \text{Re}(d)} \cdot V = 0 \Rightarrow \text{Re}(d) < 0$$

$$\Rightarrow \forall d \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \text{Re}(d) < 0$$

$$*. \text{Re}(d_i) < 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$2) \forall U \in \mathbb{C}^n, \exists U_i \in \ker(A - d_i I_n)^{m_i} \text{ s.t. } U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\text{ona. } (A - d_i I_n)^{m_i} (U_i) = 0$$

$$e^{t(A - d_i I_n)} U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(t(A - d_i I_n))^k}{k!} U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(t(A - d_i I_n))^k}{k!} U_i \quad \text{Converges to } 0$$

Problems

$$(E) \quad X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t), \quad t \in I.$$

$$(E_0): \quad X'(t) = A(t)X(t).$$

$(X_1, \dots, X_n)$ systeme fondamental des solutions.

$\Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n)$ base de SE_0 .

$$\omega(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \Pi_n(I, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \Phi_{t_0}: S_0 \rightarrow \Pi_n(I, \mathbb{R})$$
$$X \mapsto X(t_0)$$

Φ_{t_0} est une application linéaire.

D'après le th. de Cauchy, $\forall V \in \Pi_n(I, \mathbb{R})$

$\exists ! X$ solution de E_0 $\Phi_{t_0}(X) = V$.

$\forall X \in S_0 \quad \Phi_{t_0}(X) = V$.

$\Rightarrow \Phi_{t_0}$ est bijective.

$$a) \quad t_0, t \in I$$

$$X \in S_0 \text{ tq. } X(t_0) = V.$$

$$\text{tra.} \quad \Phi_{t_0}(X) = V \Leftrightarrow (\Phi_{t_0})^{-1}(V) = X.$$

$$\Rightarrow \Phi_t \circ (\Phi_{t_0})^{-1}(V) = \Phi_t(X) = X(t).$$

$$\Rightarrow \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t).$$

$\Rightarrow$ soit $t \in I$.

Puisq. $(X_1, \dots, X_n)$ base de S_0

$\Rightarrow (\Phi_t(X_1), \dots, \Phi_t(X_n))$ base de $\Pi_n(I, \mathbb{R})$

car. Φ_t est un isomorphisme, $\forall t \in I$

$\Rightarrow (X_1(t), \dots, X_n(t))$ base de $\Pi_n(I, \mathbb{R})$

$$\det(\omega(t)) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)) \neq 0$$

$\Rightarrow \omega(t)$ est inversible, $\forall t \in I$.

$$b) \quad t_0, t \in I: R(t, t_0) = \omega(t) (\omega(t_0))^{-1}.$$

$$\Phi_t: S_0 \rightarrow \pi_{n \times 1}(\mathbb{K})$$

$$x \mapsto x(t).$$

$B = (x_1, \dots, x_n)$ base of S_0

$$\text{Mat}(\Phi_t, B, B_c) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \omega(t)$$

$$\Rightarrow R(t, t_0) = \omega(t) (\omega(t_0))^{-1}$$

$$= \left(\text{Mat}(\Phi_t, B, B_c) \right) \left(\text{Mat}(\Phi_{t_0}, B, B_c) \right)^{-1}$$

$$= \text{Mat}(\Phi_t, B, B_c) \cdot \text{Mat}(\Phi_{t_0}^{-1}, B_c, B)$$

$$= \text{Mat}(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}; B_c)$$

$$\Rightarrow R(t, t_0) \text{ independent of } B$$

$$4) R(t, t_0) = \omega(t) \cdot (\omega(t_0))^{-1}$$

ona. $\forall i \leq n, X_i$ est dérivable sur I
 $\Rightarrow t \mapsto \omega(t)$ est dérivable sur I .

L'app. $\pi t \mapsto \pi \cdot (\omega(t_0))^{-1}$ est linéaire
 $\Rightarrow R$ est dérivable sur I (d. 5.10)

$$\text{et } R'(t, t_0) = \omega'(t) \cdot (\omega(t_0))^{-1}$$

$$= (X_1'(t), \dots, X_n'(t)) (\omega(t_0))^{-1}$$

$$= (A(t)X_1(t), \dots, A(t)X_n(t)) (\omega(t_0))^{-1}$$

$$= A(t) (X_1(t), \dots, X_n(t)) (\omega(t_0))^{-1}$$

$$= A(t) \cdot R(t, t_0)$$

b) soit $v \in \pi_{n \times 1}(K)$

$t \mapsto X(t) = R(t, t_0) \cdot v$ est dérivable.

$\Rightarrow X$ est dérivable sur I car $\pi \mapsto \pi \cdot v$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \text{et } X'(t) &= R'(t, t_0) \cdot v \\ &= A(t) \cdot R(t, t_0) \cdot v \\ &= A(t) X(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow X$ solution de (E_0)
 et vérif. $X(t_0) = R(t_0, t_0) \cdot v$
 $= I_n \cdot v = v$

$$5) (R(t, t_0))^{-1} = R(t_0, t)$$

$$6) X(t) = R(t, t_0) \cdot v(t)$$

a) X solution de (E) . $\Rightarrow$

X dérivable et vérifie (E)

or. $t \mapsto R(t, t_0)$ et $t \mapsto v(t)$ dérivable
 et $(\pi, X) \mapsto \pi \cdot X$ est bilinéaire
 $\Rightarrow X$ et X' sont dérivable et

$$\begin{aligned} X'(t) &= R'(t, t_0) \cdot v(t) + R(t, t_0) \cdot v'(t) \\ &= A(t) \cdot R(t, t_0) \cdot v(t) + R(t, t_0) \cdot v'(t) \\ &= A(t) X(t) + R(t, t_0) \cdot v'(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(t, t_0) \cdot V'(t) = B(t)$$

c) On déduit $V'(t) = \left(R(t, t_0)\right)^{-1} B(t)$

$$= R(t_0, t) \cdot B(t)$$

$$\Rightarrow V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, x) B(x) dx + C_0$$