

Equations différentielles et systèmes différentiels

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$

2. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\operatorname{ch}(x)$

3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x).$$

1. Déterminer une solution de (E) développable en série entière sur $] -1, 1[$.

2. Déterminer le rayon R de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$ et calculer sa somme sur $] -R, R[$.

3. Résoudre l'équation différentielle (E) sur un intervalle I ne contenant pas 0 (Ind : On cherche des solutions sous la forme $x \mapsto x^r$).

4. Déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle

$$(F) : y'' - \lambda^2 y = \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que toute les solutions réelle de (F) sont de la forme

$$y(x) = \alpha \operatorname{ch}(\lambda x) + \beta \operatorname{sh}(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

b) Déterminer la solution impaire de (F) vérifiant $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S_1) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$

2. $(S_2) : \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = 2y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice P inversible tel que $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) - 3z(t) \end{cases}$$

Exercice 6 Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

En utilisant la méthode de variation des constantes, résoudre le système différentiel suivant (S) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 7 Soit

$$f : \mathcal{M}_n(IK) \longrightarrow IK \\ A \longmapsto \det(A)$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(IK)$.

2. Montrer que $df(I_n)(H) = \text{tr}(H)$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(IK)$.

3. a) Montrer que si A est une matrice inversible, alors

$$df(A)(H) = \text{tr}({}^t(\text{com}(A))H), \quad \forall H \in \mathcal{M}_n(IK)$$

b) En utilisant la densité de $GL_n(IK)$ dans $\mathcal{M}_n(IK)$, montrer que le résultat de a) reste vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(IK)$.

4. On considère le système différentiel (S) : $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(IK)$.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de (S) et posons $w(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner en tout point t de $\mathbb{R}$ $w'(t)$ en fonction de $w(t)$.

b) Dédire que $w(t) = w(0)\exp\left(\int_0^t \text{tr}(A(x))dx\right)$