

Série 2 "Système différentiel"

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

On souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est solution de (H) sur l'intervalle $] -r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire que si f est solution de (H) sur $] -r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

4) Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $] -1, 1[$ développable en série entière.

5) On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

a) Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

c) Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Exercice 2

Soit (E) : $t^2 y'' + t y' - y = t^2$, $t \in]0, +\infty[$

1) Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = t$ est une solution de (H), l'équation homogène associée à (E).

2) On pose $z(t) = \frac{y(t)}{\varphi(t)}$.

Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution d'une équation différentielle à déterminer.

3) Résoudre (E).

Exercice 3

- 1) Déterminer les solutions complexes du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2) Dédire les solutions réelles de ce système.

Exercice 4

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -10x(t) - 4y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

Exercice 5

$$\text{Soit } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère le système différentiel (S) suivant, d'inconnue $t \mapsto X(t)$, une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, X'(t) = CX(t).$$

On dit que ce système différentiel (S) est stable si, quelle que soit la solution X de (S) , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

1. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.
2. Montrer l'existence d'une matrice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et de trois réels $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ et $\beta_2 \neq 0$, tels que :

$$C = UDU^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix}.$$

(On ne cherchera pas à trouver explicitement U ni les réels α_1, α_2 et β_2 .)

3. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $Y(t) = U^{-1}X(t)$.
 - a) Montrer que X est solution de (S) si et seulement si Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a : $Y'(t) = DY(t)$.
 - b) En déduire l'expression de $Y(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}^+$ dans ce cas.
 - c) Montrer qu'il existe X_1, X_2 et X_3 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$X(t) = e^{\alpha_1 t} X_1 + e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t) X_2 + e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t) X_3.$$

(On ne cherchera pas à trouver explicitement les matrices X_1, X_2 et X_3 .)

- d) Dédire que le système (S) est stable.