

Equation différentielle et système différentiel

Exercice 3

1) (E₁): $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$

On considère (H₁): $r^2 - 2r + 1 = 0$

1 est une racine double de (H₁)

alors $y_H(t) = \alpha e^t + \beta t e^t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

t
 $= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

avec $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = t e^t$

(y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (H₁).

On cherche une solution de (E₁) particulière par la méthode de la variation des constantes:

$y_0(x) = \alpha(t) y_1(t) + \beta(t) y_2(t)$

tg α' et β' vérifie le système

(S): $\begin{cases} \alpha'(t) y_1(t) + \beta'(t) y_2(t) = 0 \\ \alpha'(t) y_1'(t) + \beta'(t) y_2'(t) = \frac{e^t}{1+t^2} \end{cases}$

$\alpha'(t) y_1'(t) + \beta'(t) y_2'(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$

$\det S = w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & t e^t \\ e^t & (t+1) e^t \end{vmatrix}$

$= e^{2t} (t+1) - t e^{2t} = e^{2t}$

$\alpha'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ \frac{e^t}{1+t^2} & y_1'(t) \end{vmatrix}}{\det S} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t e^t \\ \frac{e^t}{1+t^2} & (t+1) e^t \end{vmatrix}}{e^{2t}}$

$= -\frac{t}{1+t^2} \Rightarrow \alpha(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c_1$

$\beta'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & \frac{e^t}{1+t^2} \end{vmatrix}}{e^{2t}}$

$= \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{1+t^2} \end{vmatrix}}{e^{2t}} = \frac{1}{1+t^2}$

$\Rightarrow \beta(t) = \text{Arctg } t + c_2$

Ainsi

$y_0(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) e^t + (\text{Arctg } t) \cdot t e^t$ est une solution particulière de (E₁).

$\underline{\text{cl}} \quad \underline{S_E} = \left\{ y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t + y_0(t), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

2) $\lambda \in \mathbb{R}^*$; $E_2: y'' - \lambda^2 y = \frac{1}{2}$.

a) Soit $y_1(x) = \cosh(\lambda x)$ et $y_2(x) = \sinh(\lambda x)$.

On a y_1 et y_2 vérifie l'éq (H): $y'' - \lambda^2 y = 0$

et $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} \cosh(\lambda x) & \sinh(\lambda x) \\ \lambda \sinh(\lambda x) & \lambda \cosh(\lambda x) \end{vmatrix}$
 $= \lambda (\cosh^2(\lambda x) - \sinh^2(\lambda x)) = \lambda \neq 0$

$\Rightarrow (y_1, y_2)$ est un système fondamental de solutions.

De plus on remarque que $y_0(x) = -\frac{1}{2\lambda^2}$ est une solution particulière de (E_2) .

Ainsi: $S_{E_2} = \left[y(x) = \alpha \cosh(\lambda x) + \beta \sinh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \right]$
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) Soit y une solution impaire vérifiant $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

$y(x) = \alpha \cosh(\lambda x) + \beta \sinh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}$
 $= -y(x) = -\alpha \cosh(\lambda x) - \beta \sinh(\lambda x) + \frac{1}{2\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \alpha \cosh(\lambda x) - \beta \sinh(\lambda x) = -\alpha \cosh(\lambda x) - \beta \sinh(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^2}$ (2)

$\Leftrightarrow 2\alpha \cosh(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^2}$. Pour $x=0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\lambda^2}$
 De plus $y'(\pi) = \alpha \lambda \sinh(\lambda \pi) + \beta \lambda \cosh(\lambda \pi) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha \lambda \sinh(\lambda \pi) + \beta \lambda \cosh(\lambda \pi) = \frac{\pi}{2}$
 $\frac{1}{2\lambda} \sinh(\lambda \pi) + \beta \cosh(\lambda \pi) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \beta = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\sinh(\lambda \pi)}{2\lambda}}{\cosh(\lambda \pi)}$

Ainsi $y(x) = \frac{1}{2\lambda^2} \cosh(\lambda x) + \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\sinh(\lambda \pi)}{2\lambda}}{\cosh(\lambda \pi)} \lambda \sinh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}$

Exercice 5

2) $(E_3): \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) & (1) \\ y'(t) = 2y(t) - 2z(t) & (2) \\ z'(t) = 2z(t) & (3) \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow z(t) = \alpha e^{2t}$

(2) $\Leftrightarrow y'(t) = 2y(t) - 2\alpha e^{2t}$

$\Leftrightarrow y'(t) - 2y(t) = -2\alpha e^{2t}$

$y_p(t) = \beta e^{2t}$

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = \beta(t) e^{2t}$

avec $\beta'(t) = \frac{-2\alpha e^{2t}}{e^{2t}} = -2\alpha$

$\Rightarrow \beta(t) = -2\alpha t + c$
 $\Rightarrow y_0(t) = -2\alpha t e^{2t}$

$$(y(t) = \beta e^{2t} - 2\alpha t e^{2t})$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x'(t) = x(t) - \alpha e^{2t}$$

$$x_R(t) = \gamma e^t$$

On cherche une solution $y_0(t) = c e^{2t}$

$$\Leftrightarrow 2c e^{2t} - c e^{2t} = -\alpha e^{2t}$$

$\Leftrightarrow$

$$c = -\alpha$$

$\Rightarrow y_0(t) = -\alpha e^{2t}$ est une solution particulière de $\textcircled{1}$.

$$\Leftrightarrow x(t) = \gamma e^t - \alpha e^{2t}; \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$(S_1): \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

soit $x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Alors $(S_1) \Leftrightarrow x'(t) = A x(t)$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a A est une matrice symétrique réelle
Alors A est diagonalisable.

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) \\ = (x-1)(x+2)^2$$

$$\text{Sp}(A) = \{1, -2\} \quad \text{mul}(1) = 1 \\ \text{mul}(-2) = 2$$

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \text{vect}(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$E_2 = \ker(A + 2I_3) = \text{vect}(u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs propres de A .

Alors $x(t) = \alpha e^t u_1 + \beta e^{-2t} u_2 + \gamma e^{-2t} u_3$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \alpha e^t - \beta e^{-2t} - \gamma e^{-2t} \\ y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} \\ z(t) = \alpha e^t + \gamma e^{-2t} \end{cases}$$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1) \chi_A(x) = (x-1)(x-2)^2$$

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2\} \quad \text{mul}(2) = 2 \\ \text{mul}(1) = 1$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \text{vect}(1, 0, 1)$$

$$\dim E_2 = 1 \neq \text{mult}(2)$$

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

2) Trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq $A = PTP^{-1}$

soit f l'end. de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

On doit chercher une matrice $B' = (u, v, w)$

$$\text{tel que } \Pi(f, B') = T = \begin{pmatrix} f(u) & f(v) & f(w) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

$$\bullet f(u) = u \Leftrightarrow u \in E_1 = \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(-3, 1, -2)$$

$$\bullet f(v) = 2v \Leftrightarrow v \in E_2 = \ker(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}(1, 0, 1)$$

$$\bullet f(w) = v + 2w$$

On pose $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y + 2z = 1 + 2x \\ x + 2y - z = 2y \\ -x + y + 3z = 1 + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ \text{valeur} \end{cases}$$

On choisit $w = (1, 1, 1)$

Alors $\Pi(f, B') = P_{B \rightarrow B'} \Pi(f, B) P_{B' \rightarrow B}^{-1}$
 $= P \cdot T \cdot P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) (S): $\begin{cases} x'(t) = y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow X'(t) = A X(t)$ avec
 $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

(S) $\Leftrightarrow X'(t) = P \cdot T \cdot P^{-1} X(t)$

$\Leftrightarrow P^{-1} X'(t) = T P^{-1} X(t)$

$\Leftrightarrow Y'(t) = T Y(t)$ avec $Y(t) = P^{-1} X(t)$

On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

Alors

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$

(4)

$$y_3(t) = \gamma e^{2t}$$

$$y_1(t) = 2y_2(t) + \gamma e^{2t}$$

$$y_2(t) = \beta e^{2t}$$

Méthode de variation de la constante

$$y_0(t) = \beta(t) e^{2t}$$

$$\text{avec } \beta'(t) = \frac{\gamma e^{2t}}{e^{2t}} = \gamma$$

$$\Rightarrow \beta(t) = \gamma t + c$$

On prend $y_0(t) = \gamma t e^{2t}$ solution particulière

$$\Rightarrow y_2(t) = \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t}$$

On déduit que

$$x(t) = P y(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = -3y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ x_2(t) = y_1(t) + y_3(t) \\ x_3(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = -3\alpha e^{2t} + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} + \gamma e^{2t} \\ x_2(t) = \alpha e^{2t} + \gamma e^{2t} \\ x_3(t) = -2\alpha e^{2t} + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} + \gamma e^{2t} \end{cases}$$

Exercice 7

$$x'(t) = A x(t) + B(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$$

1^{re} étape

$$\text{Résoudre (H)} \quad x'(t) = A x(t)$$

$$\chi_A(t) = \det(A - X I_2) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 \\ -2 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)(-1-X) + 4$$

$$= 3 - 2X + X^2 + 4 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{1\} \quad \text{mult}(1) = 2$$

$$E_1 = ??$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = x \\ -2x - y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{vect}(u) \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

Puisque χ_A est scindé, alors A est diagonalisable

$$\Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ tq } A = P T P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On doit chercher un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
tq (u, v) libre $\Rightarrow$ base $\mathbb{R}^2$
et $Av = a u + v$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = a + x \\ -2x - y = -a + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = a \\ -2x - 2y = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y = a$$

On choisit $x=1$ et $y=0 \Rightarrow a=2$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\mathcal{B}(u, v)$ est libre.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PTP^{-1}X(t)$$

$$P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t)$$

$$\Leftrightarrow Y'(t) = TY(t) \text{ avec } Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } (S_H) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \alpha e^t$$

$$(1) \Rightarrow y_1'(t) = y_1(t) + 2\alpha e^t \Rightarrow y_1 = \beta e^t$$

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = r(t) e^{at} \text{ avec } r(t) =$$

$$\Rightarrow \beta'(t) = 2\alpha \Rightarrow \beta(t) = 2\alpha t + \alpha$$

$$y_p(t) = 2\alpha t e^t$$

$$\text{Ainsi } y_1(t) = \beta e^t + 2\alpha t e^t$$

$$\text{Comme } X(t) = P \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) + y_2(t) \\ -y_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} \beta e^t + 2\alpha t e^t + \alpha e^t \\ -\beta e^t - 2\alpha t e^t \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ -2t \end{pmatrix} e^t + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$= \alpha \frac{y_1(t) + \beta y_2(t)}{x_1} e^t$$

$$w(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} (1+2t)e^t & e^t \\ -2te^t & -e^t \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow w(x_1, x_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Alors (x_1, x_2) est une base de S_H .

On applique la méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme.

$$x_p(t) = \alpha(t) x_1(t) + \beta(t) x_2(t).$$

etc. α' et β' vérifie.

$$\begin{cases} \alpha'(t) (1+2t) e^t + \beta'(t) e^t = e^t \\ \alpha'(t) (-2t e^t) + \beta'(t) (-e^t) = \ln t \end{cases}$$

$$\alpha'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ \ln t & -e^t \end{vmatrix}}{w(x_1(t), x_2(t))}$$

$$\alpha'(t) = \frac{-e^{2t} - e^t \ln t}{(-1+2t)e^{2t}} = \frac{(-1 - e^{-t} \ln t) e^{-2t}}{-1}$$

$$= 1 + e^{-t} \ln t$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \int (1 + e^{-t} \ln t) dt$$

$$\text{et } \beta'(t) = \frac{\begin{vmatrix} (1+2t)e^t & e^t \\ -2t e^t & \ln t \end{vmatrix}}{-e^{2t}}$$

$$= - \frac{(\ln t (1+2t) e^t + 2t e^{2t})}{e^{2t}} e^{-2t}$$

$$= -\ln t (1+2t) e^{-t} - 2t$$

$$\Rightarrow \beta(t) = \int -\ln t (1+2t) e^{-t} - 2t dt$$

Finalement

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + x_p(t).$$

Moalla