

Résumé "Calcul Différentiel"

Dans tout ce chapitre E et F deux $\mathbb{R}$ e.v.n dimension finie. $B_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $B_F = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de F et U un ouvert non vide de E .

Continuité

- Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$.

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- f est continue sur U si f est continue en tout point $a \in U$.

- Soit $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)v_k$.

f est continue sur U si et seulement si $\forall 1 \leq k \leq p$ f_k est continue sur U .

- **Application**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
 $x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$

f est continue sur U si et seulement si $\forall 1 \leq k \leq p$ f_k est continue sur U .

Exemple

1) Les fonctions polynômiales sont continues.

2) Les fractions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition.

3) On vérifie que la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Différentielle de f en un point

- Soit $f : U \longrightarrow F$ et $a \in U$.

On dit que f est **différentiable** en a s'il existe une application linéaire notée $df(a) : E \longrightarrow F$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- Si f est différentiable en a , alors l'application $df(a)$ est unique.

Exemple.

L'application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto M^2$$

est différentiable et $df(M)(H) = MH + HM$.

Exercice.

Soient $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, A une matrice symétrique réelle et f la fonction définie sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$f(X) = \frac{1}{2} \langle X, AX \rangle - \langle V, X \rangle.$$

1) Soit $X \in V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour tout $H \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X + H) - f(X) = \langle H, AX - V_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H, AH \rangle.$$

2) Dédurre que f est différentiable sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point X est donnée par

$$Df(X)H = \langle H, AX - V_0 \rangle, \quad \forall H \in M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Propriété

Si f est différentiable en a , alors elle est continue en a

Exemples fondamentaux

Fonction d'une variable réelle

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ une fonction d'une variable réelle (Fonction vectorielle) et $a \in I$.

f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a et on a :

$$df(a)(h) = f'(a).h, \quad \forall h \in \mathbb{R} \text{ alors } f'(a) = df(a)(1),$$

Fonction Constante

Si $f : U \rightarrow F$ est une fonction constante, alors elle est différentiable en tout point $a \in U$ et

$$df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Application linéaire

Si $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors f est différentiable en tout point $a \in E$ avec

$$df(a) = f.$$

Exemples .

1) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $b \in E$. L'application $\psi : x \mapsto \langle b, x \rangle$ est différentiable sur E et on a :

$$d\psi(x)(h) = \langle b, h \rangle, \quad \forall h \in E.$$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, justifier que la fonction $f : X \mapsto AX$ est différentiable et donner sa différentielle

Application bilinéaire.

Lemme

Soient F, G et H des e.v.n. de dimensions finies.

On considère $B : F \times G \rightarrow H$ une application bilinéaire, alors il existe $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\|B(x, y)\|_H \leq c \|x\|_F \|y\|_G, \quad \forall x \in F, y \in G$$

Théorème

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, $g : U \subset E \rightarrow G$ et $B : F \times G \rightarrow H$ une application bilinéaire. On définit l'application :

$$B(f, g) : U \subset E \rightarrow H \\ x \mapsto B(f, g)(x) = B(f(x), g(x)).$$

Si f et g sont différentiables en $a \in U$, alors $B(f, g)$ est différentiable en a et on a :

$$dB(f, g)(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)), \forall h \in E.$$

Exemple .

On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'application $\varphi : X \mapsto \langle AX, X \rangle$ est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $d\varphi(X)(H) = \langle (A + {}^t A)X, H \rangle$, $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dérivées selon un vecteur

Soit $f : U \rightarrow F$ et $v \in E$.

On dit que f admet une dérivée en $a \in U$ selon le vecteur v si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$ existe dans F . Dans ce cas on note :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Théorème

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et

$$D_v f(a) = df(a)(v)$$

Remarque

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ suivant tout vecteur } v \in E \setminus \{0_E\}} \implies \implies \boxed{f \text{ différentiable en } a}$$

Exemple

Une application qui admet des dérivées dans toutes les directions en un point $((0, 0))$ mais qui n'est pas différentiable en ce point est donné par l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ses dérivées directionnelles en $(0, 0)$ suivant le vecteur $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sont données par

$$D_v f(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2 \neq 0 \\ \frac{v_1}{2} & \text{si } v_2 = 0. \end{cases}$$

Dérivées partielles

• Soient $f : U \rightarrow F$ et $a \in U$. On appelle $i^{ème}$ dérivée partielle de f en a lorsqu'elle existe la dérivée de f en a selon le vecteur e_i de la base de E et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Propriété

1) Soit $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E$. Alors

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

2) Si $f = \sum_{j=1}^n f_j v_j$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) v_j.$$

3) • Soient $f, g : U \rightarrow F$ et $a \in U$, alors

$$\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Application.

• Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) \right).$$

Matrice Jacobienne

Soient $a \in U$ et $f : U \rightarrow F$ différentiable en a . On note $f = \sum_{j=1}^n f_j v_j$.

On appelle matrice Jacobienne de f en a c'est la matrice de l'application linéaire $df(a)$ relativement aux bases B_E et B_F

$$J_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple

soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y) = (xy, x^2 + y, \ln(1 + y^2))$$

Ecrire la matrice jacobienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Opérations sur les différentielles

i) Soient $a \in U$ et $f, g : U \rightarrow F$.

Si f et g sont différentiables en a , alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est différentiable en a et on a :

$$\forall a \in U, d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a).$$

$$\forall a \in U, J_a(\lambda f + g) = \lambda J_a f + J_a g.$$

ii) Soient $a \in U$ $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en a et $g : V \subset F \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$ différentiable en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est de différentiable en a avec

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \quad \text{et} \quad J_a g \circ f = J_{f(a)} g \times J_a f$$

Corollaire

L'ensemble des fonctions différentiables de Ω vers F constitue une sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, F)$.

Dérivée partielles de fonctions composée

• Soient x, y deux fonctions de $V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\{x(u, v), y(u, v), (u, v) \in V\} \subset U$.

Si les fonctions f, x et y sont de classe C^1 , alors la fonction $F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe C^1 sur V et on a :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

"Utilisation des coordonnées polaires Coordonnées polaires"

On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec f une fonction de C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Alors

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial r}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &\quad + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial \theta}(r \cos \theta, r \sin \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &\quad + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Dérivée le long d'un arc

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ tel que $\gamma(t) \subset U$.

Si γ est dérivable en t et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Règle de la Chaine

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_1, x_2, \dots, x_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \subset U$.

Si $\begin{cases} \bullet f \text{ est différentiable sur } U. \\ \bullet \forall 1 \leq i \leq n \quad x_i \text{ est dérivable sur } I \end{cases}$ alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f((x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))) \end{aligned}$$

est dérivable sur I avec

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}((x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))).$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$.

Vérifier que g est dérivable et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .

Applications numériques différentiables.

Lemme de Représentation de Riesz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Alors il existe un unique élément $u \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle u, x \rangle$

, $\forall x \in E$.

Proposition-Définition "Gradient"

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Si f est différentiable en a ($df(a)$ est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$), alors il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ tel que

$$df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle, \quad \forall h \in E.$$

$\nabla f(a)$ est appelé vecteur gradient de f en a .

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une B.O.N de E , alors

$$\forall h \in E \quad df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des composantes de h dans la base B . Ainsi

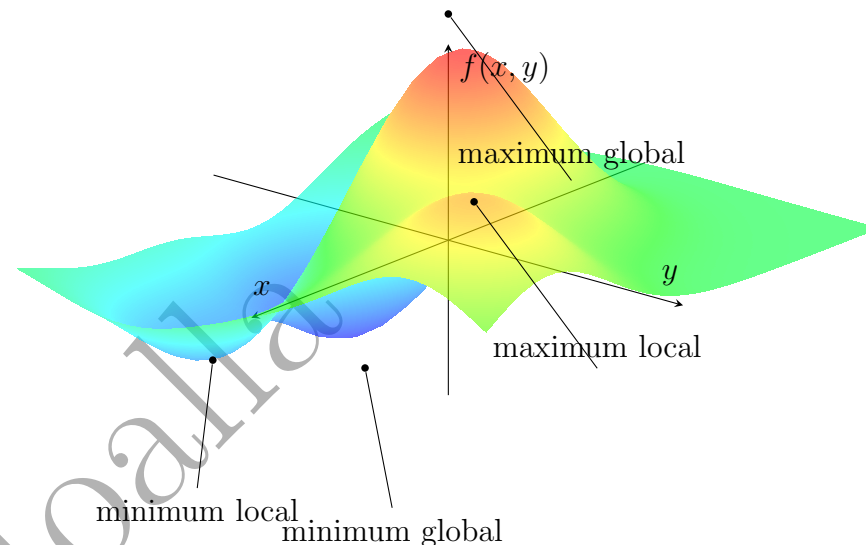
$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$ est le vecteur des composantes de $\nabla f(a)$ dans la base B .

Extremum

✿ Définition

Soient $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- On dit que f admet un **maximum global** en a si pour $\forall x \in U$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum global** en a si pour $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que pour $\forall x \in U \cap B(a, r)$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que pour $\forall x \in U \cap B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **extremum global** (resp. **extremum local**) si f admet un maximum global ou un minimum global (resp. maximum local ou un minimum local).



✿ Point critique

Soient $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $a \in U$.

On dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

✿ Proposition

Soient $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $a \in U$. **Si** a est extremum global ou bien local, **alors** a est un point critique de f ($df(a) = 0$)

Si E est **euclidien**, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Fonction de classe C^1

Définition

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$

On dit que f est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U et l'application

$$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x \longmapsto df(x)$$

est continues sur U .

Propriétés

- Soit $(f_1, \dots, f_p)$ les applications coordonnées de f dans la base de F , alors f est de classe C^1 sur U si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq p$, f_i est de classe C^1 sur U .

- Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Si f et g sont de classe C^1 sur U , alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ sont de classe C^1 sur U .

- f est une application linéaire ($\dim(E)$ finie), alors f est de classe C^1 .

- Si B est une application bilinéaire et f, g sont de classe C^1 , alors l'application $B(f, g)$ est de classe C^1 .

Théorème

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$

f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles existent et son continues sur U .

Conséquence

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est de classe C^1 sur U , alors f est continue sur U .
- Si f est de classe C^1 , alors f est différentiable sur U .
 - Les fonctions polynômiales sont de classe C^1 .
- Les fractions rationnelles sont de classe C^1 sur leurs domaines.

Exercice

Soit $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. et $f(0, 0) = (0, 0)$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les fonctions dérivées partielles
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

A retenir

- Si f est différentiable, alors f admet une dérivée selon tout vecteur $v \in E$ avec .
- Si f est différentiable, alors f admet des dérivées partielles.
- f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes les dérivées partielles existent et son continues sur U .
- Si f est de classe C^1 , alors f est différentiable sur U

Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathcal{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Théorème

- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.
- Si $\begin{cases} \bullet f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U. \\ \bullet U \text{ est un ouvert connexe par arcs} \end{cases}$, alors
- f est constante sur U si et seulement si $df(a) = 0 \quad \forall a \in U$.

Dérivées partielles d'ordre deux

Définition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa j -ème variable, on la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$.

Définition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est de classe C^2 sur U , si les dérivées partielles possible d'ordre 2 existent et sont continue.

Exemple Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

f est de classe C^2 sur U si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continue.

Théorème Schwarz

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

f est de classe C^2 sur U , alors pour tout $a \in U$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

4 Fonctions de classe C^k

Définition : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle **dérivée partielle d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$** , une dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f . Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \cdots \right) \right)$$

noté $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$ où $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$.

Définition

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe C^k si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.
- On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Toute application polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

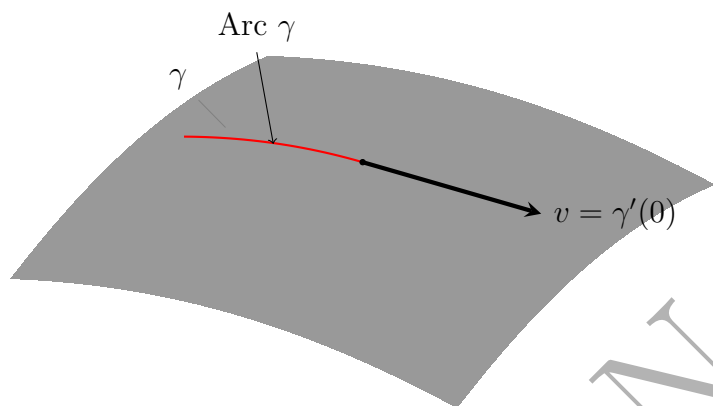
✿ Propriété

On note $f = (f_1, \dots, f_n), k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors f est de classe C^k si et seulement si chacune des f_i l'est.

Applications à la géométrie.

✿ Définition

Si A est une partie de E , $x_0 \in A$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à A au point x_0 lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.



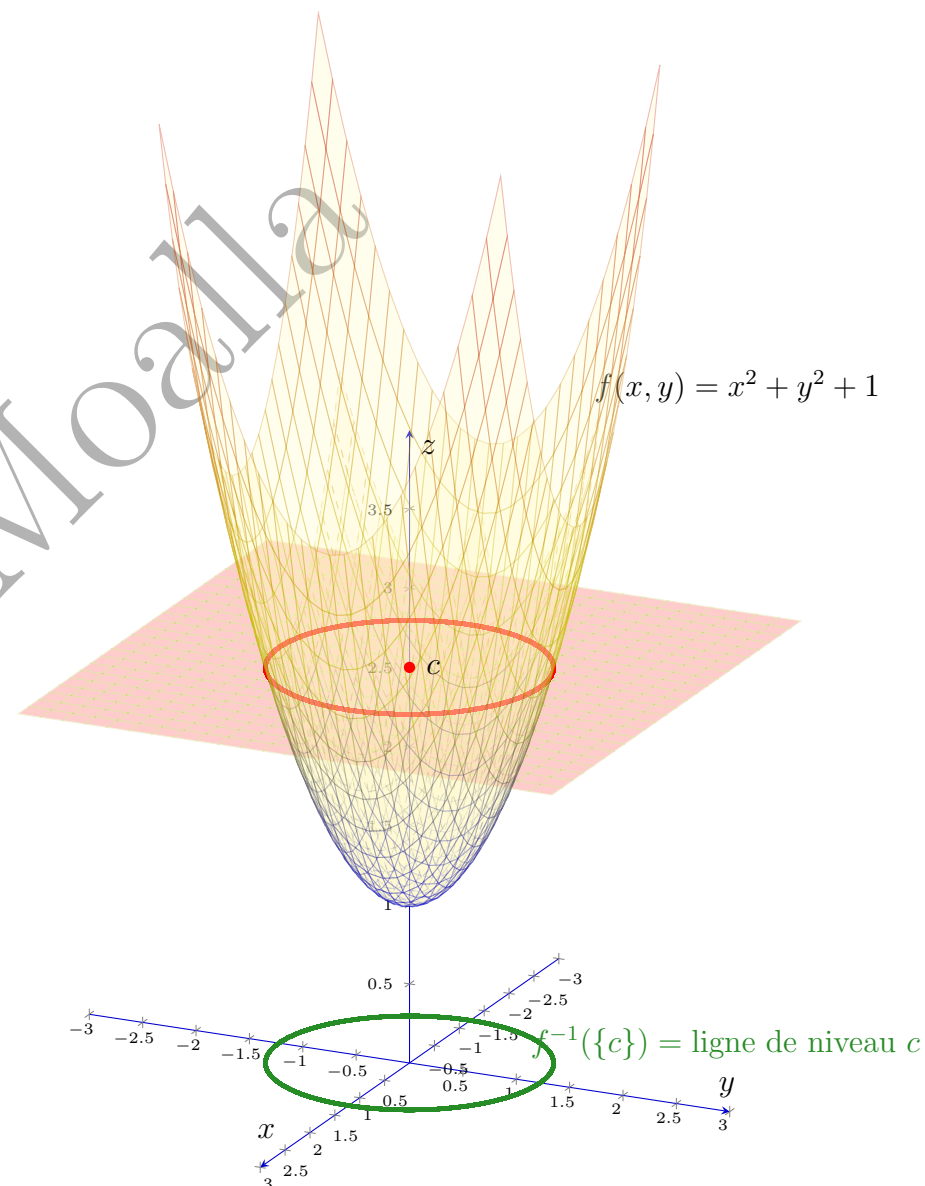
✿ Définition Ligne de niveau

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau** λ pour f l'ensemble

$$A_\lambda = \{u \in \mathcal{U}, f(u) = \lambda\}.$$

Exemple de ligne de niveau



Remarque Pour une surface $z = f(x, y)$, une ligne de niveau revient à prendre l'intersection de la surface avec le plan horizontal d'équation $z = \lambda$.

Théorème

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien et $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si A est une ligne de niveau, alors les vecteurs tangents à A en $x \in A$ sont orthogonaux au vecteur gradient en x .

Plan tangent à une surface dans $\mathbb{R}^3$

Théorème

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On considère la surface :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in U, \text{ tel que } z = f(x, y)\}.$$

Pour $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, le plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$ est d'équation :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

