

Problème "calcul différentiel"

Les calculatrices sont autorisées

Notations et objet du problème

- La notation $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ est notée I .
- Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De la sorte, si $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on peut former le produit $Mx \in \mathbb{K}^n$, ce qui permet de définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à M par :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, f_M(x) = Mx.$$

L'image de f_M , ($\text{Im } f_M$) sera notée $\text{Im}(M)$ et le noyau de f_M , ($\text{Ker } f_M$) sera noté $\text{Ker}(M)$.

Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(M)$ le spectre de M , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On note $\rho(M)$ le rayon spectral de M , c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M .

- On dira qu'une suite de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) converge, ou est convergente, si elle converge pour une norme particulière de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$). On sait qu'elle converge alors pour toute norme de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de $M_n(\mathbb{K})$) puisque ces espaces sont de dimension finie.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme euclidienne associée est notée $\| \cdot \|$.

Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x \rangle \geq 0$.

Un endomorphisme symétrique est dit défini positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x \rangle > 0$.

On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in M_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif.

Dans tout le problème, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixé, et l'on étudie des méthodes itératives pour approcher la ou les solutions du système $Ax = b$.

Partie I - La fonctionnelle J

I.A - Question préliminaire

I.A.1) Montrer qu'une matrice symétrique M de $M_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

I.B - Cas particulier : $n = 2$

Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 75 \\ -75 \end{pmatrix}$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\text{pour tout } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^2, F(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle.$$

a) Justifier que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction gradient de F ($\text{grad } F$) est notée ∇F .

b) Prouver que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \nabla F(v) = Av - b.$$

c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

e) Déduire de la question précédente que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

I.C - On suppose dans cette question que la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive et on définit l'application J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle.$$

appelée la fonctionnelle associée à A .

I.C.1) que, pour tout couple (v, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Av, h \rangle = \langle Ah, v \rangle.$$

$$\nabla J(v) = Av - b \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^n.$$

I.C.2)

a) Expliciter la fonction $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall v, h \in \mathbb{R}^n, J(v+h) = J(v) + \langle \nabla J(v), h \rangle + R(h).$$

Quel est le signe de $R(h)$?

b) On suppose qu'un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $J(v) \geq J(v_0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

justifier que

$$\nabla J(v_0) = 0.$$

I.C.3) On suppose que la matrice A est symétrique définie positive.

a) Montrer qu'il existe un unique $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(v_0) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$, et le déterminer en fonction de A et b .

b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, d non nul.

Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $J(v - rd) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(v - \rho d)$.

Exprimer r en fonction de v, d et A .

$$(\text{vérifier que } r = \frac{\langle \nabla J(v), d \rangle}{\langle Ad, d \rangle})$$

I.C.4) On suppose encore que la matrice A est définie positive. Déterminer deux constantes $\alpha > 0$ et $m > 0$ en fonction du spectre de A telles que :

$$\langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2$$

$$\|\nabla J(v) - \nabla J(u)\| \leq m \|v - u\|$$

pour tout couple (u, v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

I.C.5) On suppose que la matrice A est symétrique positive, mais non inversible, et que b appartient à $\text{Im}(A)$. On note u_0 un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $Au_0 = b$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs v_0 tels que $J(v_0) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$.

Partie III - Méthode du gradient à pas optimal

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. On note $v_0 \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $Av_0 = b$.

On construit une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence :

- on choisit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'on pose $d_0 = \nabla J(u_0)$;
- en supposant u_k déjà construit, on définit u_{k+1} en fonction de u_k de la façon suivante :
on pose $d_k = \nabla J(u_k)$ et on détermine $r_k \in \mathbb{R}$ tel que $J(u_k - r_k d_k) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_k - \rho d_k)$
(cf. I.C.3.b).
On pose alors $u_{k+1} = u_k - r_k d_k$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie, ainsi que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que, pour tout entier k , $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$.

III.A.2) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ dépendant du spectre de A tel que :

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2.$$

III.A.3) Prouver que la suite $(J(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k+1} - u_k\| = 0$.

III.A.4) Montrer que $\|d_k\| \leq \|d_k - d_{k+1}\|$, puis que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k = 0$.

III.A.5) Montrer que $\langle \nabla J(u_k), u_k - v_0 \rangle \geq \alpha \|u_k - v_0\|^2$. Prouver finalement que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v_0\| = 0$.