

Calcul différentiel

Exercice 1 I) On considère la fonction suivante :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

II) Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1) $f(x, y) = (4x + y^3)e^{xy}$.

2) $f(x, y) = \text{Log}(1 + x^2 + y^2)\cos(xy^2)$.

Exercice 2 On considère la fonction suivante :

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

3. g est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 On considère une fonction φ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on définit g par

$$g: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de φ' .

2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ'' .

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$tZ'' + Z' = 2t \quad (1).$$

4. Dans cette question, on se propose de déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction g vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 8(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad (2).$$

a) Montrer que si g vérifie (2), alors φ vérifie (1), puis donner l'expression de φ .

b) En déduire l'expression de g .

c) Déterminer la fonction g solution de (2) et vérifiant

$$g(1, 0) = 0, \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 1.$$

Exercice 4 Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On définit $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par : $g(u, v) = (uv, u^2 + v^2)$

1. Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice Jacobienne de g en tout point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2. Dédurre que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 5 Le but de cette exercice est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(u, v) = g(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$

1. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

2. Dédurre l'expression de f .

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 6 Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathbb{R}^2$ et $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} = - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 7 On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $f : X \mapsto \|X\|^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

2. Soit A une matrice symétrique réelle. On considère l'application définie par :

$$R_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2}$$

Montrer que R_A est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Exercice 8 On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et q l'application définie par :

$$q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \langle AX, X \rangle$$

1. Montrer que q est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer la différentielle de q en tout point $X \in \mathbb{R}^n$.

2. En déduire que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \nabla q(X) = (A + {}^t A)X$.

On suppose dans la suite que A est symétrique définie positive c.a. d $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle AX, X \rangle > 0$.

3. Montrer que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle$$

Justifier que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que $\nabla \varphi(X) = AX - b$.

5. On pose $\lambda = \min\{\mu, \mu \in Sp(A)\}$.

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle AX, X \rangle \geq \lambda \|X\|^2$.

b) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) \geq \frac{\lambda}{2} \|X\|^2 - \|b\| \|X\|$.

6. Vérifier que $\lim_{\|X\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, puis déduire que φ n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^n$.

7. On pose $D = \{X \in \mathbb{R}^n; \|X\| \leq \frac{2\|b\|}{\lambda} + 1\}$.
 a) Montrer que D est un compact de $\mathbb{R}^n$.
 b) En déduire qu'il existe $Y \in D$ tel que $\inf_{X \in D} \varphi(X) = \varphi(Y)$.
8. a) Montrer que $\forall X \notin D, \varphi(X) > 0$.
 b) En déduire que $\inf_{X \in \mathbb{R}^n} \varphi(X) = \varphi(Y)$.
 c) Montrer que $Y = A^{-1}b$.

✗ **Exercice 9** On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

On rappelle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B)$.

On pose $S = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$ et on considère

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto \langle AX, X \rangle$$

1. Justifier l'existence de $X_0 \in S$ tel que $F(X_0) = \max_{X \in S} F(X)$.

b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\nabla F(X) = (A + {}^t A)X, \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Soit V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que V est orthogonal à X_0 et on considère

$$\gamma:]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \cos(t\|V\|)X_0 + \frac{1}{\|V\|} \sin(t\|V\|)V$$

c) Vérifier que $\gamma(0) = X_0, \gamma'(0) = V$ et que pour tout $t \in]-1, 1[, \gamma(t) \in S$.

Vérifier que $F \circ \gamma$ admet un maximum en 0. Que vaut alors la dérivée de la fonction $F \circ \gamma$ en 0.

d) En déduire que $\langle \nabla F(X_0), V \rangle = 0$ puis que $\nabla F(X_0) = \lambda X_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Justifier que λ est une valeur propre de ${}^t A + A$ et que ${}^t X_0 A X_0 = \frac{\lambda}{2}$

2. Conclure que $\max_{X \in S} |{}^t X A X| = \frac{1}{2} \rho({}^t A + A)$
 avec $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ v.p de } M\}$.

Exercice 10 Les questions de cette exercice sont indépendantes :

1. soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$.
 a) Déterminer les points critiques de f .
 b) Montrer que $(0, 0)$ est un extrémum global de f .
2. Soit $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.
 Déterminer les extrémums de g .

Exercice 11 On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n+1} = 0$ et $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2} I_{2n}$.

$$\text{On pose } \Gamma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - xt - y^2)^2 e^{-t^2} dt.$$

2. Montrer que $\Gamma(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - y$. (On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$).

3. Montrer que Γ admet un minimum absolu.

4. En déduire la valeur de $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$, la distance entre X^2 et $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 12 On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. et on considère $b = (4, 1, 1)$, $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.
 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \|b - xu - yv\|^2$ et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}$$

1. Vérifier que $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 9)$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ existe et donner sa valeur.
4. Vérifier que $M = (1, 1, 12)$ est un point de Σ et déterminer l'équation du plan tangent à Σ en ce point.

Problème.

Partie I.

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ est absolument convergente.

(Ind : On pourra écrire pour tout $r > |z|$, $(n+1)a_{n+1}z^n = a_{n+1}r^{n+1}\left(\frac{z}{r}\right)^{n+1} \frac{n+1}{z}$.)

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ est de rayon infini.

3. On pose pour $z \in \mathbb{C}$,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ et } S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n.$$

Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, on pose l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (r, \theta) \longmapsto S(z_0 + re^{i\theta})$$

4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5. Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à r donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = e^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta})$$

6. Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à θ donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = ire^{i\theta} S_1(z_0 + re^{i\theta}).$$

7. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

Partie II.

Soit $f: (r, \theta) \longmapsto f(r, \theta)$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'application $f_r: \theta \longmapsto f(r, \theta)$ soit 2π -périodique.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$u_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

On admet que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(r, \theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $u_n: r \longmapsto u_n(r)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$ru'_n(r) - nu_n(r) = 0.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall r > 0, \quad u_n(r) = a_n r^n.$$

c) Montrer alors

$$\forall r \geq 0, \quad u_n(r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

d) En déduire que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Partie III.

Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application, on lui associe l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

définie pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$; par :

$$f(r, \theta) = F(re^{i\theta}).$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

ii) Il existe une suite complexe (a_n) telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

iii) $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, il existe une suite (b_n) telle que $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$.