

Série II "Calcul différentiel"

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $r \in \mathbb{R}$.

On dit que f est monogène (homogène) d'ordre r si :

$$f(tx, ty) = t^r f(x, y), \quad \forall t > 0$$

1. Montrer que si f est homogène d'ordre r , alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes d'ordre $r - 1$.

2. Montrer que si f est homogène, alors :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r f(x, y)$$

3. Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation d'Euler, on fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $t > 0$, on pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$.

3.1. Former une équation différentielle vérifiée par φ .

3.2. En déduire que f est homogène de degré r .

4. On suppose que f est de classe C^2 . Montrer que :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r+1)f(x, y).$$

Exercice 2

Soient $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, A une matrice symétrique réelle et f la fonction définie sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$f(X) = \frac{1}{2} \langle X, AX \rangle - \langle V, X \rangle.$$

1. Soit $X \in V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour tout $H \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X+H) - f(X) = \langle H, AX - V_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H, AH \rangle.$$

2. Dédurre que f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point X est donnée par

$$Df(X)H = \langle H, AX - V_0 \rangle, \quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

3. Montrer que f admet un minimum sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ atteint en un point unique qu'on déterminera. Dans la suite, on suppose les valeurs propres de A sont strictement positives et considère un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. i) Justifier qu'il existe une matrice symétrique $S \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant $S^2 = A$.

ii) Montrer que

$$f(X) = \frac{1}{2} \|SX - S^{-1}V_0\|^2 - \frac{1}{2} \|S^{-1}V_0\|^2,$$

pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

5. On pose $\mathcal{F}_S = \{SX, X \in \mathcal{F}\}$. Montrer qu'il existe un unique élément $Y_0 \in \mathcal{F}_S$ tel que

$$\|Y_0 - S^{-1}V_0\|^2 = \min_{Y \in \mathcal{F}_S} \|Y - S^{-1}V_0\|^2$$

6. Dédurre que la restriction de l'application f sur $\mathcal{F}$ admet un minimum atteint uniquement au point $X_1 = S^{-1}Y_0$.

Exercice 3

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme vérifiant :

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- (a) Montrer que si $\|A\| < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} A^n$ converge absolument.
- (b) Dédire que si $\|A\| < 1$, alors $(I_n - A)$ est inversible et :

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

- Vérifier que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto f(M) = M^{-1}$.
Montrer que f est différentiable en tout point $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et donner $df(M)$, $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|e^{tA} \cdot U\| \leq Ce^{-at}, \forall t > 0 \text{ avec } a > 0$$

Pour tout $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\Phi(U, V) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}U, e^{tA}V \rangle dt$$

- Montrer que Φ est bien définie.
- Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $q : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(U) = \Phi(U, U)$.
Montrer que q est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), dq(U)(H) = 2\Phi(U, H), \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|e^{tA}U\|^2$.
- En déduire que $2\Phi(U, AU) = -\|U\|^2$.

Exercice 5

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.

- Montrer qu'il existe un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$, vérifiant :

$$\|AX_0 - b\| = \inf\{\|AX - b\|; X \in \mathbb{R}^n\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(X) = \|AX - b\|^2 = (AX - b|AX - b).$$

Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que sa différentielle en $X \in \mathbb{R}^n$, notée $d\varphi(X)$, est donnée par :

$$d\varphi(X) \cdot h = 2({}^tAAX - {}^tAb|h), \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

- En déduire que :

$$\inf\{\|AX - b\| : X \in \mathbb{R}^n\} =$$

Exercice 6

On rappelle que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $Ae^{xA} = e^{xA}A$. On rappelle aussi

que si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Étant donné deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_{A,B}(x) = \text{Tr}({}^tBe^{xA}B)$$

I)

1. Montrer que $\Delta_{A,B}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_{A,B}^{(k)}(x) = \text{Tr}(^t B A^k e^{xA} B).$$

2. Montrer que $\Delta_{A,B}$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $AB = 0$.
 3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_{A,B}''(x) \geq 0$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_{A,B}(x) \geq \|B\|^2 + x \text{Tr}(^t B A B).$$

Qu'est-ce qu'on obtient si $\text{Tr}(^t B A B) = 0$?

4. On pose $H = \{M \in S_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(^t B M B) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $S_n(\mathbb{R})$ et justifier que $H \oplus \text{vect}(I_n) = S_n(\mathbb{R})$.
 5. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_{A,B}(x) \geq e^{\alpha x} \|B\|^2 > 0$.
 6. En remarquant que $\Delta_{A,B}(x) = \langle B, e^{xA} B \rangle$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(\Delta_{A,B}(x))^2}{\Delta_{A,B}(2x)} \leq \|B\|^2.$$

II)

Soit $\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \|M\| = 1\}$, la sphère unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que φ_A est strictement positive sur $\mathcal{S}$ et que φ_A admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{S}$. Soit $(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Montrer que $\text{Tr}(U^t V) = \langle U | V \rangle$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
 2. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On considère un vecteur $Y \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ et soit $N = Y^t Y$. Montrer que $N \neq 0$ et que $\varphi_A(N) = e^\lambda \|N\|^2$. Déduire que $e^\lambda \in \varphi_A(\mathcal{S})$.

Exercice 7

Soit I et J deux intervalles (non réduits à un point) et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1

On fixe $a \in I$ et $b : J \rightarrow I$ dérivable. Justifier que la fonction

$$\phi : x \mapsto \int_a^{b(x)} f(t, x) dt$$

est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.