

Calcul différentiel

Exercice 3:

$\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

1) On a la fonction $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$
 est de classe C^2 et φ de classe C^2 .

Alors la fonction g est de classe C^2 .

• $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x \varphi'(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y \varphi'(x^2 + y^2)$

2) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2 \varphi''(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2 \varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2 \varphi''(x^2 + y^2)$

3) $t Z'' + Z' = 2t$
 $\Leftrightarrow Z'' + \frac{1}{t} Z' = 2 \quad (t > 0)$
 $\Leftrightarrow Y' + \frac{1}{t} Y = 2 \quad (Y = Z')$

ou pour: $Y' + \frac{1}{t} Y = 0$

$Y_h(t) = d e^{-\int \frac{1}{t} dt} = d e^{-\ln(t)} = d e^{-\ln(\frac{1}{t})}$
 $= \frac{d}{t}$

Méthode de V. des constantes.

$Y_p(t) = \frac{d(t)}{t}$ avec $d'(t) = 2t$.

$\Rightarrow d(t) = t^2 + C$

D'où $Y_p(t) = t$

Alors $Y(t) = \frac{d}{t} + t; d \in \mathbb{R}$

ou $Y = Z'$. D'où

$Z'(t) = \frac{d}{t} + t$

$\Leftrightarrow Z(t) = d \ln t + \frac{1}{2} t^2 + \gamma, d, \gamma \in \mathbb{R}$

4) a) g vérifie 2) $\Leftrightarrow$

$2 \varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2 \varphi''(x^2 + y^2) +$
 $2 \varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2 \varphi''(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \varphi''(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$
 Alors φ vérifie 1) ($t = x^2 + y^2$)

b) D'après 3/

$\varphi(t) = d \ln t + \frac{1}{2} t^2 + \gamma$

(1)

$$\Rightarrow g(x,y) = \lambda(x^2+y^2) \\ = \lambda \ln(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \gamma$$

$$c) \quad g(1,0) = \frac{1}{2} + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$g(x,y) = \frac{1}{4} \ln(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{2}$$

Exercice 4

1) On a les fonctions $u(t) = e^t$ et $v(t) = t^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Alors la fonction $g: t \mapsto f(u(t), v(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}; \quad g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

$$\Rightarrow g'(t) = e \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(e+et; t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(e+et; t^2)$$

2) La fonction $(u,v) \mapsto g(u,v)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Alors la fonction g est de classe C^1 .

Soit $\alpha(u,v) = u$ et $\beta(u,v) = u^2 + v^2$.

$$J_{(u,v)} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

La fonction f est C^1 et g est C^1 .
alors la fonction h est C^1 .

$$h(u,v) = f \circ g(u,v)$$

$$\Rightarrow J_{(u,v)} h = J_{(u,v)} f \cdot J_{(u,v)} g$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v)) \right) \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v)) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v)), u \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v)) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v)) \right)$$

On en déduit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2uv \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2uv \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

Exercise 6

1) $f(x, y) = e^{xy} = (x+y)$
On a $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, alors f est différentiable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} df(x, y)(h, k) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k \\ &= (y \cdot e^{xy} (x+y) + e^{xy}) \cdot h \\ &\quad + (x \cdot e^{xy} (x+y) + e^{xy}) \cdot k \end{aligned}$$

$$\boxed{df(x, y)(h, k) = e^{xy} (y(x+y) + 1)h + e^{xy} (x(x+y) + 1)k}$$

2) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
 f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$, d'où f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$.

$$df_{(x, y, z)}(h, k, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot k + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot v$$

$$\boxed{df_{(x, y, z)}(h, k, v) = (y+z)h + (x+z)k + (x+y)v}$$

Exercise 6

$$f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}; \frac{v-u}{2}\right)$$

$$= g(\alpha(u, v); \beta(u, v))$$

et puisque α et β sont C^1 et g est C^1 , alors la fonction f est C^1 et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{2} a$$

2) Puisque f est de classe C^1 , alors

$$f(u, v) = \frac{1}{2} av + h(v) \text{ avec } h \text{ une fonction } C^1$$

$$\text{or } f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = v \\ x-y = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x, y) = f(x-y, x+y)$$

$$\Rightarrow g(x, y) = \frac{1}{2} a(x-y) + b(x+y) = \frac{1}{2} a(x-y) + b(x+y)$$

avec h est c1

Exercice 7

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto q(x) = \langle Ax, x \rangle$$

Donc l'app. $B: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est bilinéaire.

• L'app. $f: x \mapsto Ax$ est linéaire
alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^n$

• L'app. $g = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est linéaire
 $\Rightarrow$ différentiable et $dg = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow q = B(f, g)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ avec

$$d_x q(h) = B(df(x), g(h)) + B(f(x), dg(x)h)$$

$$= B(f(h), g(x)) + B(f(x), g(h))$$

$$= \langle Ah, x \rangle + \langle Ax, h \rangle$$

$$= \langle h, Ax \rangle + \langle Ax, h \rangle$$

$$= \langle (A + {}^tA)x, h \rangle$$

$$\Rightarrow d_x q(h) = \langle (A + {}^tA)x, h \rangle$$

2) Puisque q est une app linéaire de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$d_x q(h) = \langle \nabla q(x), h \rangle ; \forall h \in \mathbb{R}^n$$

comme $d_x q(h) = \langle (A + {}^tA)x, h \rangle, \forall h$
alors $\nabla q(x) = (A + {}^tA)x$

3) Soit λ v.p de $A \Rightarrow \exists x \neq 0$ tq
 $Ax = \lambda x \Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$
 $0 < \langle Ax, x \rangle = \lambda \|x\|^2$

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

4) $x \mapsto \langle b, x \rangle$ est linéaire à valeur dans $\mathbb{R}$, alors $df_x(h) = \langle b, h \rangle$
 $= \langle \nabla f(x), h \rangle$

or $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

$$\Rightarrow \nabla \varphi(x) = \frac{1}{2} (A + {}^tA)x - b$$

$$\boxed{\nabla \varphi(x) = Ax - b}$$

$d = \min \{ \lambda \in \text{Sp}(A) \}$
 Puisque A est symétrique réelle, alors
 A est diagonalisable, alors

$\exists B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une B.O.N. de
 $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs propres de A .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n; \quad x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k.$$

$$\Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k v_k$$

$$\text{avec } \text{Sp}(A) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$$

$$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \langle v_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \lambda_k \quad (\forall k, \lambda_k \geq d)$$

$$\geq d \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = d \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle \geq d \|x\|^2$$

$$b) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

$$\text{on a } \varphi(x) \geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - \langle b, x \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle b, x \rangle \leq \|b\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \geq \frac{1}{2} \|x\|^2 - \|b\| \cdot \|x\|$$

6) On a $d > 0$ et

$$\frac{1}{2} \|x\|^2 - \|b\| \cdot \|x\| = \|x\| \left(\frac{1}{2} \|x\| - \|b\| \right)$$

$$\text{D'où } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

ce qui montre que φ n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^n$.

$$7) \quad D = \{ x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \|x\| \leq \frac{\|b\|}{d} + 1 \}$$

on a l'app $f: x \mapsto \|x\|$ est 1-lipsch
 alors elle est continue

$$D = f^{-1} \left(\left[0, \frac{\|b\|}{d} + 1 \right] \right)$$

$\left[0, \frac{\|b\|}{d} + 1 \right]$ est un intervalle

fermé de $\mathbb{R}$ et f est continue,

alors D est un fermé
 De plus D est un borné de $\mathbb{R}^n$ qui est
 de dimension finie. Alors D est un
 compact de $\mathbb{R}^n$.

b) Puisque φ est différentiable, alors

φ est continu sur $\mathbb{R}^n$ et a valeurs dans $\mathbb{R}$.

Comme D est un compact, alors

φ est borné et atteint ses bornes sur D . En particulier, il existe $y \in D$

$$\text{t.q. } \inf_{x \in D} \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}^n \setminus D \Rightarrow \|x\| > \frac{e\|b\|}{\alpha} + 1$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 > \frac{e}{\alpha} \|b\| \|x\| + \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| > \frac{e}{\alpha} \|x\| > 0$$

$$\text{D'où } \varphi(x) > \frac{1}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| > 0$$

$$\text{b) On a. } 0 \in D \text{ et } \varphi(0) = 0 \\ \Rightarrow \varphi(0) \geq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(y) \leq 0$$

$$\text{Or } \forall x \in D: \varphi(x) \geq 0 = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \text{et on a. } \varphi(x) \geq \varphi(y), \forall x \in D$$

$$\text{D'où } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = \varphi(y)$$

φ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et y est un minimum de φ , alors

$$\nabla \varphi(y) = 0 \Leftrightarrow Ay - b = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = A^{-1}b}$$

Exercice.

$$1) f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

a) (x, y) est un point critique de f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -4x + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Le point $(0, 0)$ est un point critique de f .

$$\text{b) } f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 + xy \\ = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 \\ = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) \geq f(0, 0), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{d'où } (0, 0) \text{ est minimum global de } f$$

$$\text{or } I_0 = \int_0^{+\infty} t^e e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{et } I_1 = \frac{3}{2} \cdot I_0 = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

$$\text{D'où } \Gamma(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} + y^2 - y.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) = x \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x, y) = 2y - 1 \end{cases}$$

(x, y) est un point critique $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma(x, y) - \Gamma(0, \frac{1}{2}) &= \frac{x^2}{2} + y^2 - y + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{x^2}{2} + (y - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (0, \frac{1}{2})$ est un minimum global de Γ .

$$\begin{aligned} d(x^e, \mathbb{R}_1[x]) &= \min \{ \|x^e - p\|^e, p \in \mathbb{R}_1[x] \} \\ &= \min \left\{ \int_0^{+\infty} (t^e - (xt + y))^2 e^{-t^2} dt, x, y \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \min \{ \Gamma(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \Gamma(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x^e, \mathbb{R}_1[x]) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Exercice 10 sois

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = f(x, y) \\ \text{avec } f(x, y) = x^2 + 2y^2 \end{cases} \}$$

En un point $(x_0, y_0, z_0) \in S$ l'équation du plan tangent est :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} &= (x - x_0) 2x_0 + (y - y_0) 4y_0 \\ &= 2x_0 x - 2x_0^2 + 4y_0 y - 4y_0^2 \end{aligned}$$

$$= 2x_0 x + 2(x_0^2 + 2y_0^2) + 4y_0 y$$

$$\text{or } (x_0, y_0, z_0) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = f(x_0, y_0) \\ z_0 = x_0^2 + 2y_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 2x_0 x + 4y_0 y + 3z_0$$

2) $g(x, y)$ est un extremum de g

alors $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \text{et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow x = 1 \\ 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

$(1, 1)$ est un point critique de g .

$g(x, y) - g(1, 1) = x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5 - 4$

$= x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$

$= (x - y)^2 - y^2 + 2y^2 - 2y + 1$

$= (x - y)^2 + y^2 - 2y + 1$

$= (x - y)^2 + (y - 1)^2$

$\Rightarrow g(x, y) \geq g(1, 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (1, 1)$ est un minimum global de g .

Exercice..

1) L'app Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) $t \mapsto t^{2n+1} e^{-t^2}$ est impaire, alors

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt = 0$

$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = ??$

$u = t^{2n+1}$

$u' = (2n+1)t^{2n}$

$v' = t e^{-t^2}$

$v = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u \cdot v = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} t^{2n+1} e^{-t^2} = 0$

D'où

$I_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n-2} e^{-t^2} dt$

3) $\Gamma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - xt - y)^2 e^{-t^2} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt + \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \frac{y^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$- \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2} dt - \frac{2y}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{2xy}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t dt$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot I_1 + \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} I_0 + y^2 - \frac{2y}{\sqrt{\pi}} I_0$

Exercice 11

$$f(x,y) = \|b - x u - y v\|^2$$

$$\text{on a } u = (1, -1, 0), v = (1, 0, -1) \text{ et } b = (4, 1, 1)$$

$$\Rightarrow b - x u - y v = (4 - x - y, 1 + x, 1 + y)$$

$$\Rightarrow \|b - x u - y v\|^2 = (4 - x - y)^2 + (1 + x)^2 + (1 + y)^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 6 + x^2 + y^2 - 8x + 2xy - 8y + 1 + 2x + x^2 + y^2 + 1 + 2y$$
$$= 2(x^2 + y^2 - 3x - 3y + xy + 9)$$

2) f est une fonction polynomiale en x et y
alors elle est $\mathcal{C}^\infty$.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 6 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(2y - 3 + x)$$

3) (x,y) est un point critique de $f \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 3 + x = 0 \\ 2x - 3 + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3 - 2y) - 3 + y = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -3y + 3 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow (1,1)$ est un point critique de f

$$f(x,y) - f(1,1) = 2(x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 9) - 12$$
$$= 2(x^2 + x(y-3) + y^2 - 3y) + 6$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + y^2 - 3y\right] + 6$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y\right] + 6$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{2}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x,y) \geq f(1,1)$$

$$\Rightarrow \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = f(1,1) = 12$$

4) $(1,1,2) \in \Gamma$ car $f(1,1) = 12$

L'eq du plan tangent est :

$$z - 12 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{z = 12}$$

Exercice 12.

1) $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ c'est la sphère de centre $O_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon 1, c'est un fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, alors c'est un compact.

D'autre part: L'app $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$

est continue car:

L'app $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
 $x \mapsto (Ax, x)$
 est linéaire et $\dim \mathbb{R}^n < \infty \Rightarrow \varphi$ continue
 et l'app $B: \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est

bilinéaire et $\dim \mathbb{R}^n < \infty \Rightarrow$ continue.

$\Rightarrow F = \langle \cdot, \cdot \rangle \circ \varphi$ est continue.

Ainsi F est continue sur S qui est compact et a valeurs dans $\mathbb{R}$, alors F est bornée et atteint ses bornes sur S
 $\Rightarrow \exists x_0 \in S$ tq $\max_{x \in S} F(x) = F(x_0)$

b) On a $f: x \mapsto Ax$ et $g: x \mapsto x$ sont linéaires, alors elle sont de classe C^1 et $B: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ bilinéaire
 $\Rightarrow F: x \mapsto B(f(x), g(x))$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n$
 et $\forall h \in \mathbb{R}^n$: $dF(x)(h) = B(df(x)(h), g(x)) + B(f(x), dg(x)h)$

$$= B(Ah, x) + B(Ax, h)$$

$$= \langle Ah, x \rangle + \langle Ax, h \rangle$$

$$= \langle h, {}^tAx \rangle + \langle h, Ax \rangle$$

$$= \langle h, ({}^tA + A)x \rangle$$

$$\Leftrightarrow dF(x)(h) = \langle ({}^tA + A)x, h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Par

$$\nabla F(x) = ({}^tA + A)x$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $v \perp x_0$.

$$\forall t \in]-1, 1[; \gamma(t) = \cos(t\|v\|)x_0 + \frac{1}{\|v\|} \sin(t\|v\|)v$$

$$\gamma(0) = x_0$$

γ est dérivable sur $]-1, 1[$

$$\forall t \in]-1, 1[; \gamma'(t) = -\|v\| \sin(t\|v\|)x_0 + \cos(t\|v\|)v$$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = v$$

Puisque $x_0 \perp v$, alors

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 &= \|\cos(t\|v\|)x_0\|^2 + \left\|\frac{\sin(t\|v\|)}{\|v\|}v\right\|^2 \\ &= \cos^2(t\|v\|)\underbrace{\|x_0\|^2}_1 + \sin^2(t\|v\|) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[, \gamma(t) \in S.$$

$$\text{d) On a } \gamma(t) \in S, \forall t \in]-1, 1[$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \leq F(x_0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{puisque} \\ F(x_0) = \max_{x \in S} F(x) \end{array} \right)$$

$$F(\gamma(0))$$

$\Rightarrow$ 0 est un maximum de la fonction.

$F \circ \gamma$, Ainsi $(F \circ \gamma)'(0) = 0$

$$\text{e) On a } (F \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F \circ \gamma'(0) &= \langle \nabla F(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle \\ &= \langle \nabla F(x_0), v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \nabla F(x_0), v \rangle = 0, \forall v \in (\text{vect}(x_0))^\perp$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_0) \in (\text{vect}(x_0))^\perp = \text{vect}(x_0) \quad (\text{dim} < \infty)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \nabla F(x_0) = \lambda x_0.$$

f) D'après 1-b) on a $\nabla F(x_0) = (A+A)x_0$

$$\Rightarrow (A+A)x_0 = \lambda x_0$$

ou $x_0 \in S \Rightarrow x_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda \text{ v.p de } A+A.$

$$\text{On a } (A+A)x_0 = \lambda x_0$$

$$\Leftrightarrow {}^t x_0 (A+A)x_0 = \lambda {}^t x_0 x_0 = \|x_0\|^2 = 1$$

$$\underbrace{{}^t x_0 A x_0}_1 + {}^t x_0 A x_0 = \lambda.$$

$${}^t ({}^t x_0 A x_0) + {}^t x_0 A x_0 = \lambda$$

$${}^t x_0 A x_0 + {}^t x_0 A x_0 = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{{}^t x_0 A x_0 = \frac{\lambda}{2}}$$

2) On a $\max_{x \in S} F(x) = F(x_0) \Rightarrow$

$$\forall x \in S: F(x) \leq F(x_0) = \frac{\lambda}{2} \leq \frac{e^{(A+A)}}{2}$$

ou $\lambda \text{ v.p de } A+A \Rightarrow$

En remplaçant A par $-A$, on obtient:

$${}^t x (-A) x \leq \frac{e^{(-A)+(-A)}}{2}$$

$$-\frac{e^{(A+A)}}{2} \leq -{}^t x A x \leq \frac{e^{(A+A)}}{2}$$

$$\forall x \in S \quad |{}^t x A x| \leq \frac{e^{(A+A)}}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in S} |{}^t x A x| \leq \frac{e^{(A+A)}}{2}.$$

soit λ_0 t.q. $e(t_{A+A}) = |\lambda_0|$
 $\Rightarrow \exists y \in E$ t.q. $(t_{A+A})y = \lambda_0 y$

$\Rightarrow t_y(t_{A+A}y) = \lambda_0 t_y y$
 $e t_y A y = \lambda_0 t_y y = \lambda_0$

$\Rightarrow t_y A y = \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow |t_y A y| = \frac{|\lambda_0|}{2} = \frac{1}{2} e(t_{A+A})$
 $\Rightarrow \max_{x \in E} |t_x A x| = \frac{1}{2} e(t_{A+A})$

3.) D'après d. Appliquons à $t_{A.A}$, on obtient:
 $\max_{x \in E} |t_x t_{A.A} x| = \frac{1}{2} e(e t_{AA}) = e(t_{AA})$
 $\max_{x \in E} \|Ax\|^2 = e(t_{A.A})$

$\Rightarrow \|A\|^2 = \sqrt{e(t_{A.A})}$

4.) $A = \text{diag}(A_1, A_2) \Rightarrow t_{AA} = \text{diag}(t_{A_1 A_1}, t_{A_2 A_2})$
 $\|A\|^2 = e(t_{A.A}) = \max(e(t_{A_1 A_1}), e(t_{A_2 A_2}))$
 $= \max(\|A_1\|^2, \|A_2\|^2)$

$\Rightarrow \|A\| = \max(\|A_1\|, \|A_2\|)$

b) si A est symétrique, alors

$\|A\| = \sqrt{e(t_{A.A})} = \sqrt{e(A^2)}$
 $= |e(A)|$