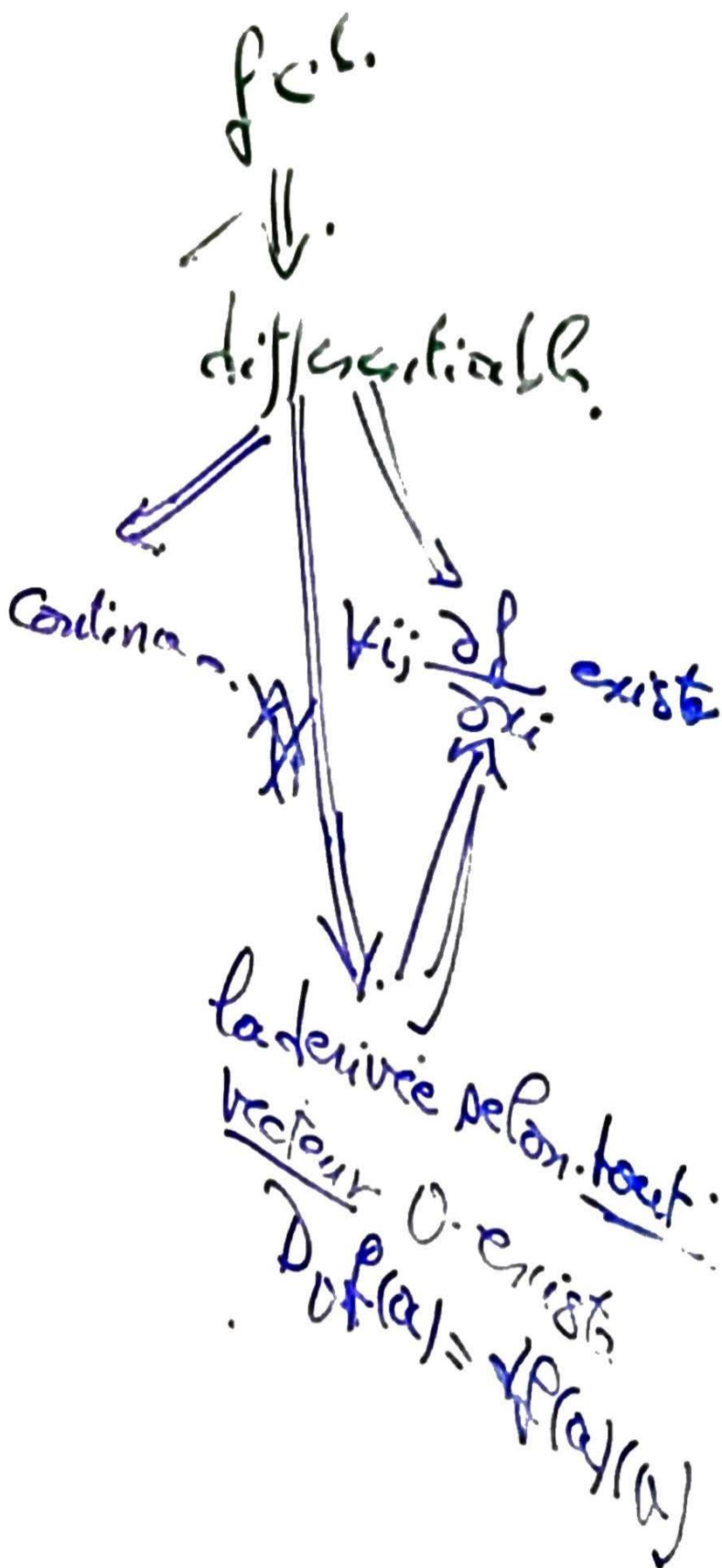


Remark:



$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

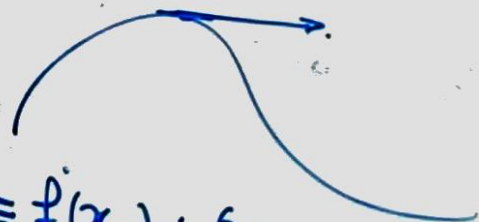
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Ex 2 "Serie 1"

$$(2) \quad \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,0) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)}{x}$$

$f \in C^2 \text{ sur } U \Leftrightarrow$ les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues



$\Delta: y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$
 $(z-z_0) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
 $\rightarrow \dots f'(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow f = c$
 $\forall x \in I, f(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow f = c$
 $\forall x \in I, f(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow f = c$

Exercice 3 "Série II"

1) a) $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

2) $\|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \|A\|^n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} A^n$ abs $< \infty$

b) $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = I_n$ Continuité de l'app. $\pi \mapsto A\pi$.

2) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$
 $\mathbb{R}^*$ ouvert

3) $\det$ continue $\Rightarrow GL_n(\mathbb{R}) = \text{ouvert}$
 $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
 $A \mapsto f(A) = A^{-1}$

a) soit $\pi \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < \frac{1}{\|\pi\|}$

on a $f(\pi + H) = f(\pi) - \pi^{-1} H \pi^{-1} + \psi(H)$

$$\pi + H = \pi(I_n + \pi^{-1}H)$$

$$\text{or } \|\pi^{-1}H\| \leq \|\pi^{-1}\| \cdot \|H\| < 1$$

$\Rightarrow I_n + \pi^{-1}H$ est inversible $\Rightarrow \pi + H$ inv.
et π inv.

$$f(\pi + H) = (\pi + H)^{-1} = (I_n + \pi^{-1}H)^{-1} \cdot \pi^{-1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-\pi^{-1}H)^k \right) \pi^{-1}$$

$$= \pi^{-1} + \pi^{-1}H\pi^{-1} + \left(\sum_{k=2}^{\infty} (-\pi^{-1}H)^k \right) \cdot \pi^{-1}$$

b) $f(\pi + H) = f(\pi) + \underbrace{\pi^{-1}H\pi^{-1}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{\infty} (-\pi^{-1}H)^k \right) \cdot \pi^{-1}}_{\varphi(H)}$

pg $\frac{\varphi(H)}{\|H\|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$

on a $\|\varphi(H)\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|(-\pi^{-1}H)^k\| \cdot \|\pi^{-1}\|$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \|\pi^{-1}\|^k \|H\|^k \|\pi^{-1}\|$$

$$\stackrel{H \neq 0}{\Rightarrow} \frac{\|\varphi(H)\|}{\|H\|} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|\pi^{-1}\|^k \|H\|^{k-1} \|\pi^{-1}\|$$

$$\leq \|\pi^{-1}\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\|\pi^{-1}\| \|H\|)^k$$

$$\leq \|\pi^{-1}\|^2 \cdot \frac{\|\pi^{-1}\| \cdot \|H\|}{1 - \|\pi^{-1}\| \cdot \|H\|}$$

$$\Rightarrow \varphi(H) = o(H)$$

$$\Rightarrow f(H + \pi) = f(\pi) + \pi^{-1}H\pi^{-1} + o(H)$$

$\Rightarrow f$ est différentiable en π .

$$\text{et } df(\pi)(H) = \pi^{-1}H\pi^{-1}$$

Exercice 4. "Série II"

$$\Phi(u, v) = \int_0^{\infty} \langle e^{tA} u, e^{tA} v \rangle dt, \quad u, v \in \mathcal{D}_A(\mathbb{R})$$

1) $t \mapsto e^{tA} u$ sont continues sur $[0, \infty[$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

$\Rightarrow t \mapsto \langle e^{tA} u, e^{tA} v \rangle$ est continue sur $[0, \infty[$.

De plus $|\langle e^{tA} u, e^{tA} v \rangle| \leq \|e^{tA} u\| \cdot \|e^{tA} v\|$

$\leq C^2 e^{-2\alpha t}$

$\Rightarrow t \mapsto e^{-2\alpha t}$ est intégrable sur $[0, \infty[$.

$\Rightarrow t \mapsto \langle e^{tA} u, e^{tA} v \rangle$ est intégrable.

$\Rightarrow \Phi$ est bien défini.

$$(e^{tA} u)' = A e^{tA} u$$

$$2) \text{ si } \Phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \|e^{tA} u\|^2 dt = 0$$

$t \mapsto e^{tA} u$ est continue.

$\Rightarrow t \mapsto \|e^{tA} u\|$ est continue.

$\Rightarrow t \mapsto \|e^{tA} u\|^2$ est continue, positive
et intég. sur $[0, \infty[$.

$\Rightarrow \|e^{tA} u\|^2 = 0, \forall t \in [0, \infty[$.

$\Leftrightarrow e^{tA} u = 0, \forall t$ " "

$\Leftrightarrow u = 0$ car e^{tA} est inversible.

$\Rightarrow \Phi$ est produit scalaire.

$$3) q(u) = \Phi(u, u).$$

$u \mapsto u$ est diff. $\Rightarrow q$ diff.

Φ est bilinéaire

$$dq(u)(h) = \Phi(h, u) + \Phi(u, h) = 2\Phi(u, h)$$

$$4) f: t \mapsto \|e^{tA} u\|^2 = \langle e^{tA} u, e^{tA} u \rangle$$

$t \mapsto e^{tA} u$ est dérivable,
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, $\Rightarrow$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(t) = \langle A e^{tA} u, e^{tA} u \rangle + \langle e^{tA} u, A e^{tA} u \rangle = 2 \langle A e^{tA} u, e^{tA} u \rangle$$

$$5) 2\Phi(Au, u) = 2 \int_0^{\infty} \langle e^{tA} Au, e^{tA} u \rangle dt$$

$$= \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = -f(0)$$

$$2\Phi(Au, u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} u\|^2 - \|u\|^2 = -\|u\|^2$$

Exercice 2: TP 2025

$$V_0 \in \Pi_{nc}(\mathbb{R})$$

$$S_p(A) \subset \mathbb{R}_+^* \quad , \quad A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle V_0, x \rangle$$

$$1) f(x+h) = \frac{1}{2} \langle x+h, A(x+h) \rangle - \langle V_0, x+h \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (\langle x, Ax \rangle + \langle x, A \cdot h \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle - \langle V_0, x \rangle - \langle V_0, h \rangle)$$

$$= f(x) + \langle h, Ax - V_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle$$

$$2) f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle$$

$$\text{or } |\langle h, Ah \rangle| \leq \|h\| \cdot \|Ah\|$$

$$\Rightarrow \text{if } h \neq 0: \frac{|\langle h, Ah \rangle|}{\|h\|} \leq \|Ah\|$$

$$h \mapsto \frac{\langle Ah, h \rangle}{\|h\|^2} \Rightarrow \text{minima}$$

$$\Rightarrow \underline{L} \|Ah\| = \|f'(0)\| = 0$$

$$h \rightarrow 0$$

3) Supp. qd. f admet un min en x_0
et on a f diff sur $\Pi_{nc}(\mathbb{R}) = \text{ouvert}$

$$\Rightarrow Df(x_0)(h) = 0, \quad \forall h \in \Pi_{nc}(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax_0 - V_0, h \rangle = 0 \quad || \quad ||$$

$$\Leftrightarrow Ax_0 - V_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax_0 = V_0 \Leftrightarrow x_0 = A^{-1} V_0$$

il existe, il est unique

$$\text{Pg } \forall x \in \Pi_{nc}(\mathbb{R}), f(x) \geq f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) =$$

$$\text{soit } h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h$$

$$= f(x_0 + h) - f(x_0) = \langle h, Ax_0 - V_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \forall x \in \Pi_{n_2}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow x_0$ est l'unique min de f .

$$4) i). \min_x \|Sx - S^{-1}V_0\|^2 = \|Sx\|^2 + \|S^{-1}V_0\|^2 - 2 \langle Sx, S^{-1}V_0 \rangle = \|S^{-1}V_0\|^2$$

$$= \langle Sx, Sx \rangle - 2 \langle x, \underbrace{S \cdot S^{-1}V_0}_{V_0} \rangle$$

$$= \langle S^T x, x \rangle - 2 \langle x, V_0 \rangle = 2f(x)$$

$$5) \mathcal{F}_S = \{Sx, x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{vect} \cup \Pi_{n_2}(\mathbb{R})$$

Alors $\exists! y_0 \in \mathcal{F}_S$ tq.

$$\min_{y \in \mathcal{F}_S} \|y - S^{-1}V_0\|^2 = d^2(S^{-1}V_0, \mathcal{F}_S) = \|S^{-1}V_0 - y_0\|^2$$

avec $y_0 = \text{projection orthog de } S^{-1}V_0 \text{ sur } \mathcal{F}_S$

$$6) \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|Sx - S^{-1}y_0\|^2 = \frac{1}{2} \|S^{-1}y_0\|^2$$

$$= \min_{y \in \mathbb{R}_S} \frac{1}{2} \|y - S^{-1}y_0\|^2 = \frac{1}{2} \|S^{-1}y_0\|^2$$

$$\begin{cases} y = Sx \text{ et } S \text{ inversible} \\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}_S \end{cases}$$

atteint au point $y = Sx_0 \Leftrightarrow$
 $x_0 = S^{-1}y_0$

Remarque..

chercher $\min_{x \in A} f(x)$

$A = \text{Compact}$
+
Continue.

$A = \text{ouvert}$
et f diff.
 $\downarrow$
 $\nabla f(x) = 0$.

$A \text{ convexe}$
 $\Downarrow$
Projection
orthogonale

Exercice 1 "Série II" C L

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y).$$

f homogène d'ordre r so.

$$f(tx,ty) = t^r f(x,y), \quad t > 0.$$

$$1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (f(tx,ty)) = t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} (tx,ty)$$

$$= t^r \frac{\partial f}{\partial x} (x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} (tx,ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x} (x,y)$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ est homogène d'ordre r-1.

e) $t \mapsto f(tx,ty) = t^r f(x,y)$ est dérivable / a

$$t > 0: \quad x \frac{\partial f}{\partial x} (tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y} (tx,ty) = r t^{r-1} f(x,y)$$

t=1

$$x \frac{\partial f}{\partial x} (x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y} (x,y) = r f(x,y). \quad (E)$$

alors $t > 0$

$$\Rightarrow x \cdot t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x} (x,y) + y \cdot t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial y} (x,y) = r t^{r-1} f(x,y)$$

3) E vérifie (E).

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0; \quad \varphi(t) = f(tx,ty).$

2) φ est dérivable en tout t.

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x} (tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y} (tx,ty)$$

$$= \frac{r}{t} f(tx,ty) \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{r}{t} \varphi(t)$$

$$3. \text{ par exemple } \varphi(t) = n e^{n \ln t} = n t^{n-1}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = f(x,y) = n$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = f(t, x, t, y) = t^r \cdot f(x, y)$$

$\Rightarrow$ fest monogen $\rightarrow$ d'ordre r .

$$\Phi(x) = \int_a^{b(x)} f(t, x) dt.$$

soit $F(x, y) = \int_a^y f(t, x) dt.$

$$\Phi(x) = F(x, b(x))$$