

$\rightarrow f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ dérivée
 $t \mapsto f(t)$

$\rightarrow f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}$ fonction vectorielle

$\rightarrow f: U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$

differential

dérivée

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$f'(x,y) = (2x, 3y^2)$$

$$f''(x,y) = (2, 6y)$$

$$f'''(x,y) = (0, 6)$$

Calcul différentiel

$\dim E < \infty$; $\dim F < \infty$

$U = \text{ouvert } \subset E$

Continuité

$f: U \subset E \rightarrow F, a \in U$

f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $\|x - a\| < \delta$ $\Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$

Exp: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$

f continue sur $\mathbb{R}^2 =$ le quotient des fonctions continues
si $(x, y) = (0, 0)$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2^2$$

$$\Rightarrow |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Autrement

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} r \rightarrow 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \alpha \sin \alpha}{r} = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ continue en } (0, 0)$$



Differential : $f: U \subset E \rightarrow F, a \in U = \text{ouvert} \Rightarrow \exists r > 0 \text{ tq. } B(a, r) \subset U$ $\|a+h-a\| = \|h\| < r \Rightarrow a+h \in B(a, r) \subset U$

f est différentiable en $a \Leftrightarrow$ il existe une application linéaire notée $df(a): E \rightarrow F$ tq.

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \underbrace{\|h\| \varepsilon(h)}_{\substack{df(a) \cdot h \\ = o(h)}} \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ex 1. Soit $f: \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R})$
 Soit $\pi \in \pi_n(\mathbb{R})$ $\pi \mapsto \pi^e$.

$$f(\pi + H) = (\pi + H)^e = \pi^e + \pi H + H \pi + \underbrace{H^2}_{\text{circled}}$$

$\exists df(\pi): \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(\mathbb{R})$ est linéaire ?
 $H \mapsto \pi H + H \pi$

$$\begin{aligned} \|H^e\| &\leq \|H\|^2 \Rightarrow \frac{\|H^e\|}{\|H\|} \leq \|H\| \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0 \\ \Rightarrow H^e &= \|H\| \varepsilon(H) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\pi + H) = f(\pi) + df(\pi)(H) + \|H\| \varepsilon(H)$$

Exp e.

$$\text{soit } f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z}$$

soit $a \in \mathbb{C}^*$.

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(1+\frac{h}{a})}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot (1 - \frac{h}{a} + o(h))$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + o(h)$$

$$= f(a) + (-\frac{1}{a^2}h) + o(h)$$

$$\exists df(a): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ est linéaire} \\ h \mapsto -\frac{1}{a^2}h$$

$\rightarrow$ Si $f = \frac{1}{z}$ est différentiable
et $df(a) = -\frac{1}{a^2}$, $\forall a \in \mathbb{C}^*$

$\rightarrow$ Si $f: E \rightarrow F$ linéaire

Alors f est différentiable en a et

$$df(a) = f, \forall a \in E.$$

$$\Rightarrow df(a)(h) = f(h)$$

$$\underline{\text{Ca}} \quad f(a+h) = f(a) + f(h) + o$$

Exp Soit $A \in M_n(K)$ et $f: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$
est différentiable et $X \mapsto AX$

$$df(X)(H) = AH, \forall H \in M_n(K)$$

$\rightarrow$ Soit $f: U \subset E \rightarrow E$

$$g: U \subset E \rightarrow F.$$

$B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire.

$$\text{on pose } B(f,g): U \rightarrow G \\ x \mapsto B(f,g)(x) = B(f(x), g(x))$$

si f et g sont différentiables en a .
 alors $B(f, g)$ est différentiable en a .

$$d \cdot dB(f, g)(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h))$$

Lemma.

Soit $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire

$$\Rightarrow \exists \pi \geq 0 \text{ s.t. } \|B(x, y)\|_G \leq \pi \cdot \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

En effet.

$$\begin{aligned} B(f, g)(a+h) &= B(f(a+h), g(a+h)) = B(f(a) + df(a)(h) + \|h\|_E \varepsilon_f(h), g(a) + dg(a)(h) + \|h\|_F \varepsilon_g(h)) \\ &= B(f(a), g(a)) + \underbrace{B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h))}_{\text{linéarité en } h} + B(f(a), \|h\|_E \varepsilon_f(h)) + B(\|h\|_F \varepsilon_g(h), g(a)) \\ &\quad + B(df(a)(h), \|h\|_F \varepsilon_g(h)) + B(\|h\|_E \varepsilon_f(h), dg(a)(h)) + B(\|h\|_E \varepsilon_f(h), \|h\|_F \varepsilon_g(h)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad &\|df(a)(h)\|_E \cdot \|dg(a)(h)\|_F \\ &\leq \pi \cdot \pi \cdot \|h\|_E^2 \\ &\frac{\textcircled{1}}{\|h\|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\|h\|} \rightarrow 0$$

Exp 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Soit $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $X \mapsto \langle AX, X \rangle$

$X \mapsto AX$ et $X \mapsto X$ sont linéaires (d. 50)
 $\Rightarrow$ différentiable.
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, alors f est différentiable et

$$\begin{aligned} df(X)(H) &= \langle AH, X \rangle + \langle AX, H \rangle \\ &= \langle H, {}^tAX \rangle + \langle AX, H \rangle \\ &= \langle (A + {}^tA)X, H \rangle \end{aligned}$$

Expe 2 : Soit $g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$
 $\pi \mapsto \pi^2$

$g(\pi) = B(\pi, \pi)$ avec $B: (X, Y) \mapsto AX + XA$ bilinéaire
 $\pi \mapsto \pi^2$ est diff. $\Rightarrow g$ est différentiable
 et $dg(\pi)(H) = B(H, \pi) + B(\pi, H)$
 $= H \cdot \pi + \pi \cdot H$

Remarque
 Si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$, $a \in I$
 f est différentiable en $a \Leftrightarrow$
 f est dérivable en a .
 et $df(a)(h) = f'(a) \cdot h$
 $\Rightarrow f'(a) = df(a)(1)$
 car $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h)$

Dérivée selon un vecteur

Soit $f: U \subset E \rightarrow F$; $a \in U$ et $v \in E$.

f admet une dérivée ^{ena} selon le vecteur v :

si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe dans F .

notée $D_v f(a)$

Ex

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$D_{v_1} f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t v_1) - f(0,0)}{t}$$

$$D_{v_2} f(0,0) = -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{t} = \frac{1}{2}$$

si f est différentiable en a , alors
 f admet des dérivées selon v.v.a.
 et $D_v f(a) = df(a)(v)$

Car $f(a+tv) = f(a) + df(a)(tv) + \|tv\| \cdot \epsilon(tv)$
 $\Rightarrow \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a)(v) + \underbrace{\|v\| \cdot \epsilon(tv)}_{\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0}$

→ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .
 $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ " de F .
 on définit la dérivée partielle de f en a .

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \stackrel{\text{def}}{=} D_{e'_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te'_i) - f(a)}{t}$

Ex $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+b+te_1) - f(a,b)}{t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a,b)}{t}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ??$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

ou bien $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$

$$\Rightarrow |df(a)(h)| = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$\text{Nat}(df(a), B, B') =$

$$df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$J_{(x,y)}^f = \begin{pmatrix} y & x \\ ex & ey \\ yexy & xeyy \end{pmatrix}$$

1) Sei f, g mit differenzierbar
 Also $k, d \in K$; $df + g$ mit
 differenzierbar =

$f \circ g$ ist diff. in a $\Rightarrow$ $f(g(a)) = f(a)$
 f ist diff. in $f(a)$ $\Rightarrow$ $f'(f(a)) = f'(a)$
 $f \circ g$ ist diff. in a $\Rightarrow$ $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$
 f ist diff. in $f(a)$ $\Rightarrow$ $f'(f(a)) = f'(a)$
 $f \circ g$ ist diff. in a $\Rightarrow$ $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

et. $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \Rightarrow d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))(df(a)(h))$
 $J_a(g \circ f) = J_{f(a)}g \times J_a f \Rightarrow \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_i}$

App $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable.
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(r, \theta) \mapsto h(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = g \circ f(r, \theta)$ avec $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$J_{(r, \theta)} h = \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta), \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) \right) = J_{f(r, \theta)} g \times J_{(r, \theta)} f = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(r, \theta)), \frac{\partial g}{\partial y}(f(r, \theta)) \right) \times \begin{pmatrix} \cos \theta - r \sin \theta \\ \sin \theta + r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Donc

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$