

Rappel:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

$$\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

si φ et ψ sont diff.
 $\Rightarrow g$ est différentiable.

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} =$$

$\rightarrow f: U \subset E \rightarrow F$ de classe C^1
 si f est différentiable en tout point $a \in U$
 et l'app. $df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$
 $a \mapsto df(a)$
 est continue.

Exp soit $f: E \rightarrow F$ linéaire
 est de classe C^1 con.
 f est différentiable.

$$df: E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$a \mapsto df(a) = f$$

= app constante.

$\Rightarrow$ continue.
Th: $f \in C^1$ sur $U \Leftrightarrow$ les dérivées partielles
 existent et sont continues.

Exercice 1
 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cl. $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$ ③

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$

1) a) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$(u, v) \mapsto \frac{u+v}{2}$ non poly $\Rightarrow C^1$
 $(u, v) \mapsto \frac{v-u}{2}$

et g de classe $C^1 \Rightarrow f$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$

b) $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{a}{2}$

c) f est cl. $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{2} \Rightarrow f(u, v) = \frac{a}{2} \cdot u + h(v)$ avec h est cl

d) g vérifie (*) $\Rightarrow f(u, v) = \frac{a}{2} u + h(v)$
 $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = v \\ x-y = u \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + h(x+y)$$

reciproquement

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{a}{2} + h'(x+y) \\ &\quad + \frac{a}{2} - h'(x+y) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc les solutions de (*) sont :

$$g(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + h(x+y) \text{ avec } h \in \mathbb{C}$$

Dérivée le long d'un arc

Soit $f: U \subset E \rightarrow F$ (différentiable)

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ et $\gamma(t) \in U, \forall t \in I$

$\Rightarrow f \circ \gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ (dérivable)

γ est dérivable et est différentiable
Alors $f \circ \gamma$ est dérivable et
 $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$

Cor.

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= df(\gamma(t))(1) \\ &= df(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= df(\gamma(t))(\gamma'(t)) \end{aligned}$$

App. "La règle de la chaîne"

$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables
Alors $F(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est dérivable et
 $F'(t) = f'(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

$$\text{et } F'(t) = df(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))(\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \varphi'_i(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

Exps: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable
 soit $g(t) = f(2t, e^t)$

$t \mapsto 2t$
 $t \mapsto e^t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{et } g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(2t, e^{2t}) + 2t e^{2t} \frac{\partial f}{\partial x_2}(2t, e^{2t})$$

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$$

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$h \in \mathbb{R}^2, \quad h = (h_1, h_2) \\
= h_1 \underbrace{(1, 0)}_{e_1} + h_2 \underbrace{(0, 1)}_{e_2}$$

Rest 1

Gradient.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace eucldien.

soit $f: U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a .

$df(a): E \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire

$\Rightarrow \exists!$ vecteur noté $\nabla f(a)$ q.
 $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Théorème
 $\forall \varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire
 $\exists! b \in E$ q $\varphi(x) = \langle x, b \rangle$, vérif

soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E
 $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \xrightarrow{\text{Mat}} \text{Mat}(h, B) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

$$\text{avec } \text{Mat}(\nabla f(a), B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Exercice 8:

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \langle Ax, x \rangle$$

1) q est diff en tout point $x \in \mathbb{R}^n$

$$\text{et } dq(x)(H) = \langle AH, x \rangle + \langle Ax, H \rangle$$

2) on a $dq(x)(H) = \langle H, {}^tAx \rangle + \langle Ax, H \rangle$
 $= \langle (A + {}^tA)x, H \rangle$

Par définition du gradient

$$\nabla q(x) = (A + {}^tA) \cdot x$$

3) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

4) $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

$$x \mapsto \langle b, x \rangle \text{ est linéaire (d. s.)}$$

$\Rightarrow$ différentiable.
 Alors $\varphi = \frac{1}{2}q - \psi$ est différentiable.

$$\text{et } d\varphi(x)(H) = \frac{1}{2}dq(x)(H) - d\psi(x)(H)$$

$$= \frac{1}{2} \langle (A + {}^tA)x, H \rangle - \langle b, H \rangle$$

$$= \langle Ax - b, H \rangle$$

$$\Rightarrow \nabla \varphi(x) = Ax - b$$

Autrement.

$$d\psi(x)(H) = \langle b, H \rangle \Rightarrow \nabla \psi(x) = b$$

$$\varphi = \frac{1}{2}q - \psi \Rightarrow \nabla \varphi(x) = \frac{1}{2}\nabla q(x) - \nabla \psi(x)$$

$$= Ax - b$$

5) $d = \min\{N, p, \text{esp}(A)\}$
 A est symétrique définie positive
 $\Rightarrow \exists B(p-d, 1) \cap B(0, R)$
 $\varphi|_B \hookrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

$$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle A e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \geq d \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle \geq d \|x\|^2.$$

b) on a. $\langle b, x \rangle \leq |\langle b, x \rangle| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|b\| \cdot \|x\|.$

Donc: d'après a). $\varphi(x) \geq \frac{d}{e} \|x\|^2 - \|b\| \|x\|$

c) $d > 0 \Rightarrow \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{d \|x\|^2}{e} - \|b\| \|x\| = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty \Rightarrow \varphi$ n'est pas majorée.

$\Rightarrow \varphi$ n'admet pas de minimum.

$$7) D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{\varepsilon \|b\|}{2} + 1\}$$

$$a) D = B_p(0, \frac{\varepsilon \|b\|}{2} + 1)$$

= c'est la boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon \|b\|}{2} + 1$

= fermé et borné. ($\mathbb{R}^n$ est compact)

$\Rightarrow D = \text{compact}$

b) On a f est différentiable, alors continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$D = \text{compact et non vide}$

$$\Rightarrow \exists y \in D \mid \inf_{x \in D} f(x) = f(y)$$

$$8) \forall x \notin D \Rightarrow \|x\| > \frac{\varepsilon \|b\|}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \|x\|^2 > \|b\| \|x\| + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \rho(A) > 0$$

$$b) \text{ on a } \forall x \notin D \Rightarrow f(x) > 0 = f(0) \geq f(y) \quad (0 \in D)$$

$$\text{et on a } \forall x \in D: f(x) \geq f(y)$$

$$\Rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(y)$$

$$c) \text{ on a } f \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(y) \\ \mathbb{R}^n = \text{ouvert} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \nabla f(y) = 0 \Leftrightarrow Ax = b$$

$$\Leftrightarrow y = A^{-1}b$$

$$(\text{car } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow A \text{ inversible})$$

Exercice 9.

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } \|x\| = 1\}$$

$$= S(0,1) = \text{fermé et borné.}$$

$$= \text{Compact} \neq \emptyset$$

• F continue sur $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in S \text{ tq. } \max_{x \in S} F(x) = F(x_0)$$

$$b) \begin{cases} x \mapsto Ax \\ x \mapsto x \end{cases} \text{ sont linéaires} \Rightarrow C^1$$

$$(f, \cdot) \text{ est bilinéaire}$$

$$\Rightarrow F \text{ est bilinéaire } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

$$dF(x) = (A + I)x$$

si f et g sont de C^1 sur U et B bilinéaire
 $\Rightarrow B(f, g)$ est C^1 .

$$dB(f, g)(a)^n = B(df(a)^n, g(a)) + B(f(a), dg(a))$$

$$\alpha \neq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } v \perp x_0$$

$$\gamma:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \cos(t\|v\|)x_0 + \frac{1}{\|v\|} \sin(t\|v\|) \cdot v$$

$$c) \gamma(0) = x_0$$

$$\begin{cases} t \mapsto \cos(t\|v\|) \\ t \mapsto \sin(t\|v\|) \end{cases} \text{ sont dérivables}$$

$$x_0 \text{ et } v \text{ sont des vecteurs constants.}$$

$$\Rightarrow \gamma \text{ est dérivable sur }]-1,1[$$

$$\text{et } \gamma'(t) = -\|v\| \sin(t\|v\|) \cdot x_0 + \cos(t\|v\|) \cdot v$$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = v$$

Donc $x_0 \perp v \Rightarrow$

$$\| \gamma(t) \|^2 = \cos^2(\|v\|) \frac{\|x_0\|^2}{2} + \frac{1}{\|v\|^2} \sin^2(\|v\|) (\|v\|)^2$$

$$= 1.$$

$$\Rightarrow \gamma(t) \in S.$$

* $(F \circ \gamma)(t) \leq (F \circ \gamma)(0), \forall t \in]-1, 1[$??

Car $\gamma(t) \in S \Rightarrow F(\gamma(t)) \leq \max_{x \in S} F(x) = F(x_0) = F(\gamma(0))$

• $] -1, 1[$ est un ouvert.

• F est différentiable et γ dérivable $\Rightarrow F \circ \gamma$ est dérivable?

$$\Rightarrow (F \circ \gamma)'(0) = 0$$

d) ma. $(F \circ \gamma)'(t) = dF(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$

$$\Rightarrow (F \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla F(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle$$

$$0 = \langle \nabla F(x_0), v \rangle$$

d) On a. $\nabla F(x_0) \perp V; \forall V \in (\text{vect}(x_0))^{\perp}$
 $\Rightarrow \nabla F(x_0) \in \text{vect}(x_0)^{\perp} = \text{vect}(x_0)$
 (dans $\mathbb{R}^n$)
 $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ q } \nabla F(x_0) = \lambda x_0$

e) On a. $\nabla F(x_0) = ({}^t A + A) x_0 = \lambda x_0$
 $x_0 \in S \Rightarrow x_0 \neq 0$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, {}^t A + A$
 On a. $({}^t A + A) x_0 = \lambda x_0 \Rightarrow {}^t x_0 ({}^t A + A) x_0 = \lambda {}^t x_0 x_0$

$\Rightarrow {}^t x_0 A x_0 + {}^t x_0 A x_0 = \lambda$
 $\Rightarrow 2({}^t x_0 A x_0) = \lambda$

$\Rightarrow 2({}^t x_0 A x_0) = \lambda$
 $\Rightarrow \frac{{}^t x_0 A x_0}{{}^t x_0 x_0} = \frac{\lambda}{2}$
 $\parallel$
 $F(x_0)$

a) Rq $\max_{x \in S} |F(x)| = \frac{1}{2} \rho(A + {}^t A)$

on a. $\forall x \in S; F(x) \leq F(x_0) = \frac{1}{2} \leq \frac{\rho(A + {}^t A)}{2}$
 (dvp de $A + {}^t A$)

on remplace A par $-A$

$\langle -Ax, x \rangle \leq \frac{\rho(-A - {}^t A)}{2}$

$-F(x) \leq \frac{\rho(A + {}^t A)}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in S; -\frac{\rho(A + {}^t A)}{2} \leq F(x) \leq \frac{\rho(A + {}^t A)}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in S; |F(x)| \leq \frac{\rho(A + {}^t A)}{2}$

$\Rightarrow \max_{x \in S} |F(x)| \leq \frac{\rho(A + {}^t A)}{2}$
 Soit $x_1 \in S$ q $({}^t A + A) x_1 = \lambda x_1$ ex. $|\lambda| = \rho$

$$\Rightarrow E_{X_1}(A + tA) X_1 = \lambda$$

$$\stackrel{||}{=} F(X_1) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow |F(X_1)| = \left| \frac{\lambda}{2} \right| = \frac{\lambda}{2} = \frac{\rho(A + tA)}{2}$$

$$-7 \leq F(x) \leq 7$$

$$F(x_1) = 7$$

$$\max |F(x)| = 7$$