

Problème Révision : Préhilbertien

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $\text{Tr}(A)$ sa trace et $\text{rg}(A)$ son rang.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on considère l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\Phi_{A,B} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XB \end{array}$$

Si $B = A$, $\Phi_{A,B}$ sera notée simplement Φ_A .

1^{ère} Partie

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(C) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}({}^tC)$.
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp. b).

Montrer que la matrice $V {}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé?

4. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k Y = Y(\lambda I_n - B)^k$.
 - (b) En déduire que pour tout polynôme P , à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$.

- (c) On suppose que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^p (X - \mu_i)^{\beta_i}$$

avec $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ sont les valeurs propres de A deux à deux distincts.

- i) Montrer que $Y\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
 - ii) En déduire qu'il existe $a \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.
5. Conclure que si le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \{\lambda + \mu, \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \text{ et } \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)\}$.
 6. Soient $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $Z_1, \dots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^p Y_i {}^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ sont tous nuls.
 7. On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \dots, U_n)$ et $(W_1, \dots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$.
Montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
 8. On suppose que les deux matrices A et B sont réelles et symétriques.
 - (a) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (b) Montrer que si C et D sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{Tr}(DC) = \text{Tr}(CD)$.
- (c) Montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2ème Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini à la fin de la partie précédente.

1. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $S = PDP^{-1}$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice D : $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

2. Dans cette question, on considère une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = \Phi_S(X)$; on pose aussi $Y = P^{-1}XP$ et $N = P^{-1}MP$. On note $n_{i,j}$ les coefficients de la matrice N et $y_{i,j}$ ceux de Y .
3. i) Vérifier que $\Phi_D(Y) = N$.
 ii) Exprimer les coefficients $y_{i,j}$ à l'aide des λ_k et des coefficients de la matrice N .

On suppose désormais que la matrice M est symétrique et définie positive.

1. Montrer que la matrice N est symétrique et définie positive.

2. Soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \dots, u_n$.
3. Montrer que ${}^tUYU = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.
4. Soit $\alpha > 0$; montrer que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.
5. On note $U(s)$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}}, \dots, u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}}$, $s \in]0, 1]$. Justifier que l'application $s \mapsto {}^tU(s)NU(s)$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.
6. Exprimer l'intégrale de la fonction précédente en fonction de ${}^tUYU$ et en déduire que si U est non nul, alors ${}^tUYU > 0$.
7. Conclure que la matrice X est symétrique définie positive.
8. Dans cette question, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on étudie la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ dans le cas où $B = -A$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'une de ses normes.
- a) On suppose que $A = \Delta$ où Δ est la matrice $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts.
 i) On prend $n = 2$
 Montrer que $\dim(\text{Ker}) \Phi_{A,-A} = 2$.
 ii) On revient au cas général. Montrer que $\dim(\text{Ker}) \Phi_{A,-A} = n$.
- b) Déduire que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. $\dim(\text{Ker}) \Phi_{A,-A} = n$.