

Problème Révision "Système différentiel"

Notation

Dans ce problème, n désigne un entier naturel ≥ 2 . Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $\langle, \rangle$, et la norme associée sera $\|\cdot\|$. Il est défini par $\langle X, Y \rangle \mapsto X^t Y$.

On considère une application continue $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \langle A(t)X, X \rangle \geq 0$$

On note Σ_A l'ensemble des applications $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad F''(t) = A(t)F(t). \quad (1)$$

Partie I "Structure de l'ensemble Σ_A "

On considère l'application $B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$;

B est continue puisque l'application A l'est aussi. On note alors Σ_B l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle

$$X'(t) = B(t)X(t). \quad (2)$$

Si $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une application deux fois dérivable, on lui associe l'application $X_F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, X_F(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que Σ_A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application deux fois dérivable.

Montrer que $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $X_F \in \Sigma_B$.

b) Montrer que l'application $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B$, $F \mapsto X_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

c) En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ_A .

3) Montrer que, pour tout triplet $(s, u, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique application F , élément de Σ_A , telle que $F(s) = u$ et $F'(s) = w$.

Partie II : Quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle (1)

Soit $F \in \Sigma_A$; on lui associe l'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|F(t)\|^2$, $t \geq 0$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer sa dérivée seconde.

2. En déduire que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

3. On conserve les hypothèses et les notations de la question II.1. précédente; on suppose de plus qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq t_1 < t_2$ et $f(t_1) = f(t_2) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.

b) Montrer que la fonction F est nulle.

4. "Une famille de solutions non bornées de (1)"

Soit $v \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note F_v l'élément de Σ_A tel que $F_v(0) = F'_v(0) = v$. Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \mapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.

5. "Des normes sur Σ_A "

Soit b un réel strictement positif.

- Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F \mapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.
- Montrer que l'application $\|\cdot\|_b : F \mapsto \|F(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur Σ_A .
- Montrer également que l'application $\|\cdot\|_{\infty,b} : F \mapsto \sup_{0 \leq t \leq b} \|F(t)\|$ est une norme sur Σ_A .
- Justifier que les normes $\|\cdot\|_{\infty,b}$ et $\|\cdot\|_b$ sur Σ_A sont équivalentes.

Partie III "Comportement de solutions de l'équation différentielle (1)"

- Soit $a \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul. Pour tout entier $m \geq 1$, on note $g_{m,a}$ l'unique élément de Σ_A vérifiant $g_{m,a}(0) = a$ et $g_{m,a}(m) = 0$.
 - Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application $t \mapsto \|g_{m,a}(t)\|$ est décroissante sur le segment $[0, m]$.
 - Montrer alors que $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$.
 - Justifier que la suite $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans $(\Sigma_A, \|\cdot\|_1)$ vers un élément noté g_a .
- " Une famille de solutions bornées de (1)"

On conserve ici les notations de la question 1. précédente.

 - Montrer que la suite de fonctions $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ vers l'application g_a .
 - Montrer que $g_a(0) = a$ et que l'application $t \mapsto \|g_a(t)\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
 - Montrer que g_a est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

Partie III.

Dans la suite, on fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A est diagonalisable et de valeurs propres positifs et on considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} X''(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = 0 \end{cases}$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que R est diagonalisable et de valeurs propres positifs et vérifie $R^2 = A$. La matrice R trouvée sera notée $\sqrt{A}$.
- On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $Y_0(t) = \frac{1}{2}(e^{t\sqrt{A}} + e^{-t\sqrt{A}})X_0$. Montrer que Y_0 est deux fois dérivable et qu'elle est une solution sur $\mathbb{R}$ du système (S).

Soit $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable et solution du système (S). On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Z(t) = \begin{pmatrix} Y(t) - Y_0(t) \\ Y'(t) - Y'_0(t) \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
- Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $Z'(t) = BZ(t)$ et $Z(0) = 0$.
- Déduire que Z est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ puis que $Y = Y_0$.