

Relations de Comparaison:

1) Relation de négligeabilité.

1) Def: $u_n = o(v_n)$
 $\Leftrightarrow \exists (\varepsilon_n) \text{ tq. } u_n = \varepsilon_n \cdot v_n$
avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$

$\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq. } \forall n \geq n_0; |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$
* si $v_n \neq 0$, à partir d'un certain rang.
 $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Propriétés:

- a) si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$
b) si $u_n = o(v_n)$
et $u'_n = o(v'_n) \Rightarrow u_n + u'_n = o(v_n)$

3) $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \forall d \neq 0; u_n = o(d v_n)$

4) si $u_n = o(v_n)$
 $u'_n = o(v'_n) \Rightarrow u_n \cdot u'_n = o(v_n \cdot v'_n)$

5) $u_n = o(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow u_n = l + o(1)$

7) $n^\alpha = o(n^\beta), \forall \beta > \alpha$
 $n^\alpha = o(e^{\beta n}), \forall \beta > 0$

$\text{App} (L_n n)^\alpha = o(n^\alpha), \forall \alpha > 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot (L_n n)^\alpha \cdot e^{\beta n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \\ 0 & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$

II) Equivalence

1) Déf: $U_n \sim V_n \Leftrightarrow U_n = V_n + o(V_n)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (d_n) \text{ s.t. } U_n = d_n \cdot V_n \\ \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0, |U_n - V_n| \leq \varepsilon \cdot |V_n|$

* si $U_n \neq 0$ à partir d'un certain rang
 $U_n \sim V_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$

2) Propriétés:

1) si $U_n \sim V_n$ et $V_n \sim W_n \Rightarrow U_n \sim W_n$

2) si $\begin{cases} U_n \sim V_n \\ V_n \sim V'_n \end{cases} \Rightarrow U_n \sim V'_n$

3) si $\begin{cases} U'_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \\ V'_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_n}{U'_n} \sim \frac{V_n}{V'_n}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l \Leftrightarrow U_n \sim l$
 avec $\underline{l \neq 0}$.

5) si $U_n \sim V_n \rightarrow U_n^\alpha \sim V_n^\alpha$
 et $U_n > 0$

6) si $U_n = o(V_n) \Rightarrow U_n = o(W_n)$
 et $V_n \sim W_n$

III) Domination:

1) Déf: $U_n = O(V_n)$

$\Leftrightarrow \exists \pi \geq 0 \text{ s.t. } n \geq n_0, |U_n| \leq \pi |V_n|$

si $V_n \neq 0$, à partir d'un certain rang
 $U_n = O(V_n) \Leftrightarrow$ la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bornée

Properties

1) Si $U_n = O(V_n) \Rightarrow U_n + V_n = O(V_n)$
 $U_n = O(V_n)$

2) Si $U_n = o(V_n) \Rightarrow U_n = O(V_n)$

3) Si $U_n \sim V_n \Rightarrow U_n = O(V_n)$
et $V_n = O(U_n)$

Can

$U_n \sim V_n \Leftrightarrow U_n = V_n + o(V_n)$

ona. $\left. \begin{array}{l} V_n = O(U_n) \\ o(U_n) \Rightarrow O(U_n) \end{array} \right\} \Rightarrow U_n + o(U_n) = O(U_n)$

$\Rightarrow U_n = O(U_n)$

Exp: $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sin x \sim_0 x$

$\cos x - 1 \sim_0 -\frac{1}{2}x^2$

$\tan x \sim_0 x$

$\sinh x \sim_0 x$

$\cosh x - 1 \sim_0 \frac{1}{2}x^2$

$e^x - 1 \sim_0 x$

$\ln(1+x) \sim_0 x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$

$\arcsin x \sim_0 x$

$\operatorname{arctg} x \sim_0 x$

$\operatorname{Arctg} x \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$

$\ln(1+x) \sim_{+\infty} \ln x$

$\cosh x \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$

$\sinh x \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$

$P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$

$\operatorname{ord} \log P = n$

Exercice 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad U_n &= e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left(1 - e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \rightarrow 0 \\ &\sim e \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad U_n &= \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n e^{\frac{\ln n}{n}}} \\ \text{ona } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} &= 1 \Rightarrow U_n \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{Pq } (2n)! &= o((n!)^2 (2n+1) 2^{4n}) \\ \text{soit } U_n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2 (2n+1) 2^{4n}} \end{aligned}$$

Rappel.

$$\text{Si } U_n \geq 0 \text{ on a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L.$$

$$\text{Si } L < 1$$

$$\Downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

$$\text{Si } L > 1$$

$$\Downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{ona. } \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2 (2n+3) 2^{4n+4}} \cdot \frac{(n!)^2 (2n+1) 2^{4n}}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 (2n+3) 2^4} \cdot \frac{(2n)!}{(2n)!} \sim \frac{e^3 n^2}{e^4 n^2} = \frac{e^{-1}}{4} < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Autrement :

Formule de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$

$$4) \text{ Pq. } e^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{Pq. } \lim_{n \rightarrow \infty} n^e e^{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^e e^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} n^e e^{\sqrt{n}} = 0.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} n^e e^{\sqrt{n}} = 0.$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \rightarrow 0$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Def: $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \left\{ \begin{array}{l} f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad (I = \text{intervalle}) \\ f \text{ est Convexe} \end{array} \right.$$

$\alpha \geq 0$
 $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$

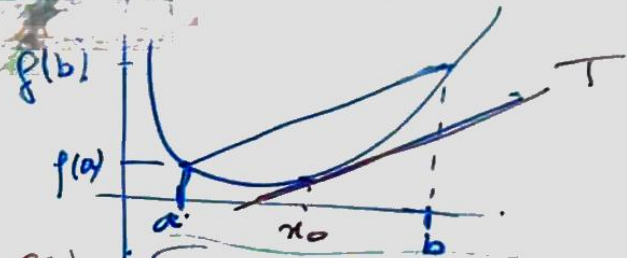
Inégalité de Jensen

$\forall x_1, \dots, x_n \in I$ et $d_1, \dots, d_n \in [0, 1]$
et $\sum_{i=1}^n d_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^n d_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_i f(x_i)$$

f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point.

f est continue sur I



si f est dérivable en x_0
 f est au dessus de la tangente en x_0

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

f est au dessus de la corde joignant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

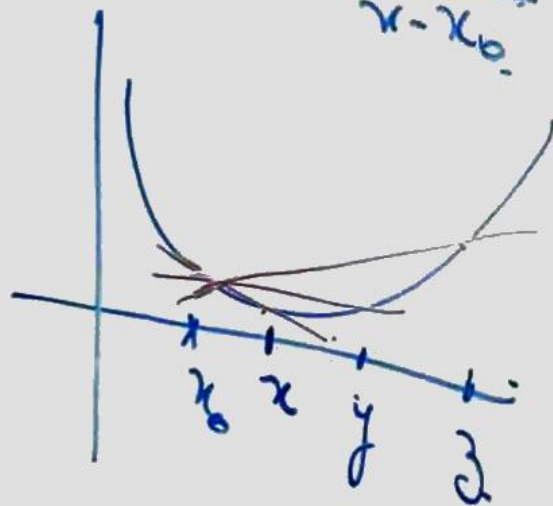
si f est dérivable sur I
 f convexe $\Leftrightarrow f'$ est croissante

si f est 2 fois dérivable sur I
 f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

si f est convexe, alors la fonction
pente en tout point x_0 est croissante.

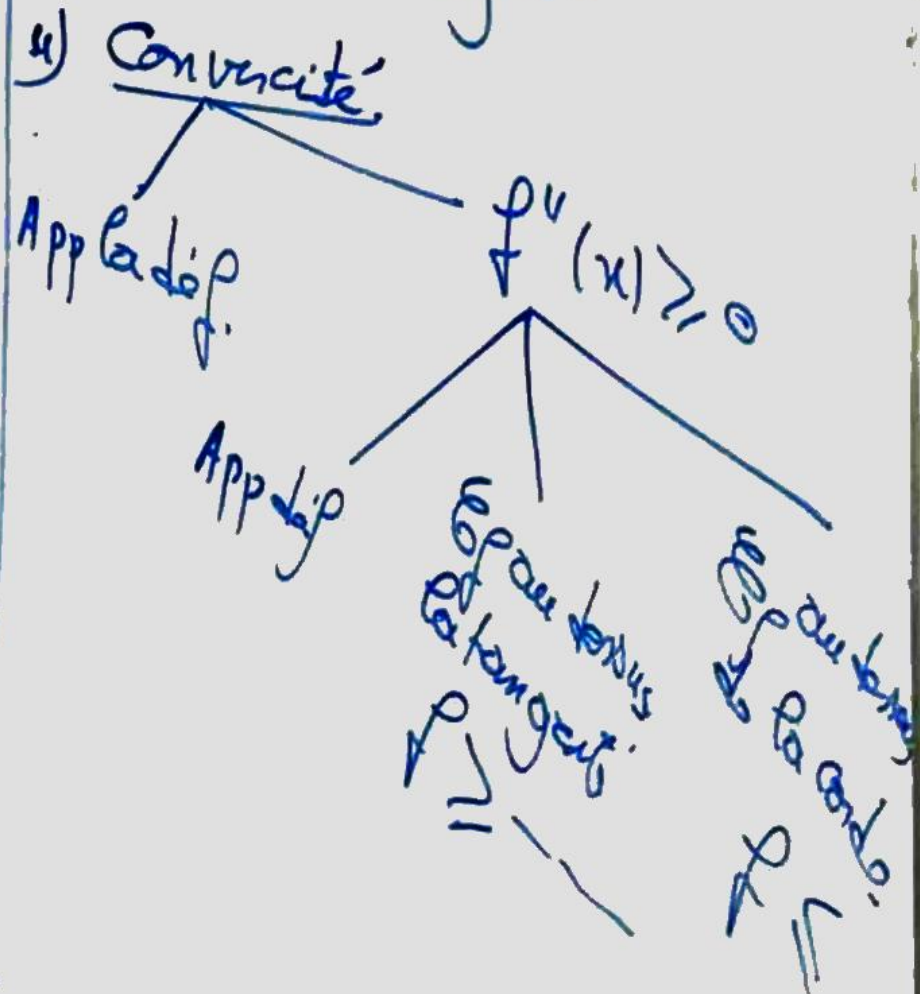
$$\varphi_{x_0}: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Pour montrer une inégalité

- 1) Etude de fonctions
- 2) T.A.F
- 3) Formule de Taylor.
- 4) Convexité



Ex 4.

1) 19. $\sin x \geq \frac{x}{\pi}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Soit $f(x) = \sin x; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

f est 2-fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$f''(x) = -\sin x \leq 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\Rightarrow f$ est concave.

Donc f est au-dessus de la corde passant par

pour $O(0, 0)$ et $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ qui est d'équation

$$y = \frac{2}{\pi} x.$$

$\Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]: f(x) \geq \frac{x}{\pi}.$

2) 19. $\ln(1+x) \leq x, \forall x > -1$

Soit $f(x) = \ln(1+x), x > -1$

f est continue sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$)

f est dérivable sur $]0, x[$ (ou $]x, 0[$)

D'après **T.A.F.**; $\exists c \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$)

$$f(x) - f(0) = f'(c) \cdot x.$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

$$* \text{ si } x > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 1+c > 1.$$

$$\frac{x}{1+c} < x \Rightarrow \ln(1+x) < x$$

$$* \text{ si } x < 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow 1+c < 1.$$

$$\frac{x}{1+c} > x \Rightarrow \ln(1+x) > x.$$

Donc $\forall x > -1$ et $x \neq 0$, $\ln(1+x) \leq x$
 qui est vrai pour $x=0$,

4) Soit $c \in [a, b]$.

$\forall t \in \mathbb{R}; e^{ct} \leq e^{at} + e^{bt}$

si $t \geq 0$

ma $c \leq b \Rightarrow ct \leq bt, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow e^{ct} \leq e^{bt} \Rightarrow e^{ct} \leq e^{bt} + e^{at}$

si $t \leq 0$

$c \geq a \Rightarrow ct \geq at$

$\Rightarrow e^{ct} \leq e^{at} \leq e^{at} + e^{bt}$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}; e^{ct} \leq e^{at} + e^{bt}$

Autrement

$c \in [a, b] \Leftrightarrow \exists d \in [0, 1] \text{ tel } c = d \cdot a + (1-d) \cdot b$

$\Rightarrow ct = d \cdot (a + (1-d)t) + (1-d) \cdot b$

$\Rightarrow e^{ct} = e^{d(a + (1-d)t) + (1-d)b}$

or la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe

$$\Rightarrow e^{d(a + (1-d)t) + (1-d)b} \leq \underbrace{d}_{\leq 1} e^{a + (1-d)t} + \underbrace{(1-d)}_{\leq 1} e^{b + (1-d)t}$$

$$e^{ct} \leq e^{a + (1-d)t} + e^{b + (1-d)t}$$

Exercise 5:

a) For $\forall y \in [\alpha, \beta]$.
 $0 < (\beta - \alpha) e^{\lambda y} \leq (\beta - y) e^{\lambda \alpha} + (y - \alpha) e^{\lambda \beta}$

$\Leftrightarrow$ For $e^{\lambda y} \leq \frac{\beta - y}{\beta - \alpha} e^{\lambda \alpha} + \frac{y - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \beta}$

such $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} > 0$ et $\lambda' = \frac{y - \alpha}{\beta - \alpha} > 0$
 $\lambda + \lambda' = 1$.

such $f(x) = e^{\lambda x}$

f est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et.
 $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\Rightarrow f(\alpha) \leq \lambda^2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Rightarrow f$ convexe.
 $e^{\lambda y} \leq \frac{\beta - y}{\beta - \alpha} e^{\lambda \alpha} + \frac{y - \alpha}{\beta - \alpha} e^{\lambda \beta}$

Exercise 2:

a) $f(t) = \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \cdot e^{-t}$
 $e^{-t} \underset{0}{\sim} 1$

$\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{t - 1 + e^{-t}}{t(1 - e^{-t})}$
 $\underset{0}{\sim} \frac{t - 1 + e^{-t}}{t^2}$

or $t - 1 + e^{-t} = t - 1 + \left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)$
 $\underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

Donc $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{t^2}{2}} = 1$

1) Eq. diff d'ordre 1.

$$(E): y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

$$(H): y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

$$S_E = \{ y(x) = y_h(x) + y_p(x) \}$$

$$S_H = \{ y_h(x) = d e^{-\int a(x) dx} \mid d \in \mathbb{K} \}$$
$$= \text{vect} \{ e^{-\int a(x) dx} \}$$

S_H est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension 1.

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = d(x) e^{-\int a(x) dx}$$

avec

$$d'(x) = \frac{b(x)}{e^{-\int a(x) dx}}$$

Théorème Cauchy-Lipschitz

$$(E): y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
$$\begin{cases} y(x_0) = d. \end{cases}$$

admet une unique solution.

$\Rightarrow$ Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E)

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = \alpha$$

$$\text{Alors } y_1 = y_2$$

II) Eq. diff d'ordre 2:

(E): $ay'' + by' + cy = f(x)$ ($a \neq 0$)

(H): $ay'' + by' + cy = 0$

$S_E = \{ y(x) = y_p(x) + y_h(x) \}$

(E_c): $ax^2 + bx + c = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

* Si $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$

$S_H = \{ y(x) = \lambda e^{r_1 x} + d' e^{r_2 x}, \lambda, d' \in \mathbb{R} \}$
 = R.e.o. de dimension 2.

* Si $\Delta = 0 \Rightarrow r_0$ racine double

$S_H = \{ y(x) = (d x + d') e^{r_0 x}, d, d' \in \mathbb{R} \}$

* Si $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

$S_H = \{ y_h(x) = e^{\alpha x} (d \cos \beta x + d' \sin \beta x) \}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$)

* Si $\Delta \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$

$S_H = \{ y_h(x) = d e^{r_1 x} + d' e^{r_2 x}, d, d' \in \mathbb{C} \}$

* Si $\Delta = 0 \Rightarrow r_0$ racine double

$S_H = \{ y_h(x) = (d x + d') e^{r_0 x}, d, d' \in \mathbb{C} \}$

Si $f(x) = e^{mx} P(x)$.

$\Rightarrow$ Si m n'est pas racine de E_c.

$y_p(x) = \Phi(x) e^{mx}$ avec $\deg \Phi = \deg P$

$\Rightarrow$ Si m racine simple

$y_p(x) = x \Phi(x) e^{mx}$

$\Rightarrow$ Si m racine double

$y_p(x) = x^2 \Phi(x) e^{mx}$ avec $\deg \Phi = \deg P$

Exercice 6:

$$(E): y'(t) - \frac{t}{\sigma^2} y(t) = -f(t); t \geq 0$$

Puisque f est continue sur $[0, \infty[$.

Alors toute solution de (E) est C^1 sur $[0, \infty[$.

$$(H): y'(t) - \frac{t}{\sigma^2} y(t) = 0$$

$$y_h(t) = d e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{d}{g_\sigma(t)}$$

$$\text{on cherche } y_p(t) = d(t) e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{d(t)}{g_\sigma(t)}$$

$$\Rightarrow d'(t) = \frac{-f(t)}{e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}} = -f(t) g_\sigma(t)$$

$$\Rightarrow d(x) = -\int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt = -\int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt + c$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \text{ est une solution particulière.}$$

Alors

$$S_E = \left\{ y(x) = \frac{d}{g_\sigma(x)} - \frac{1}{g_\sigma(x)} \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \right.$$

$$\left. S_E = \left\{ y(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \left(d - \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \right) \right\} \right. \\ d \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\varphi \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$$

$$\text{tg } \varphi(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \left(c - \int_0^x f(t) g_\sigma(t) dt \right).$$

$$e) \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) g_\sigma(t) dt = c$$

on pose.

$$\int_0^{\infty} f(t) g_\sigma(t) dt = c$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \int_x^{\infty} f(t) g(t) dt.$$

$$= \frac{1}{g(x)} \left(\int_x^0 f(t) g(t) dt + \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) g(t) dt}_C \right)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \left(C - \int_0^x f(t) g(t) dt \right)$$

D'après 1/. φ solution de (E)

3) 1^{re} méthode.

Supp qu'il existe une solution φ bornée.
d'après 1/ $\exists C \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \left(C - \int_0^x f(t) g(t) dt \right)$

Puis φ bornée $\Rightarrow \exists \eta > 0$ $|\varphi(x)| \leq \eta$

$$\Rightarrow \eta g(x) \leq C - \int_0^x f(t) g(t) dt \leq \eta g(x)$$

$\rightarrow 0$

$\leftarrow x \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) g(t) dt = C.$$

$$\Leftrightarrow C = \int_0^{\infty} f(t) g(t) dt$$

= unité de C.

Donc φ est unique.

2^{de} méthode.

Supposons qu'il existe φ_1 et φ_2 .
deux solutions bornées distinctes.

$$\Rightarrow \exists C_1 \neq C_2$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{g(x)} \left(C_1 - \int_0^x f(t) g(t) dt \right)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{g(x)} \left(C_2 - \int_0^x f(t) g(t) dt \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \frac{(c_1 - c_2)}{g_0(x)} = (c_1 - c_2) e^{\frac{x_0}{g_0(x)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \pm \infty.$$

absurde car $\varphi_1 - \varphi_2$ est bornée

Exercice 8:

$$k \in \mathbb{N}; x \geq 0; f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt.$$

$$1) \text{ soit } x, y \in [0, \infty[\text{ et } x \leq y.$$

$$\Rightarrow kt \in [0, 1], -tx \geq -ty.$$

$$\Rightarrow e^{-tx} \geq e^{-ty} \quad (x \mapsto e^x \text{ est } \uparrow)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^k e^{-tx} dt \geq \int_0^1 t^k e^{-ty} dt$$

$$\Rightarrow f_k(x) \geq f_k(y).$$

$$\Rightarrow f_k \text{ est } \downarrow.$$

$$e) \text{ soit } x \in [0, \infty[\text{ (fixe).}$$

$$\text{on a } t \geq 0, x \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-tx} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^k e^{-tx} \leq t^k$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^k e^{-tx} dt \leq \int_0^1 t^k dt.$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k+1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$$

$$2) f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx} dt = -\frac{1}{x} [e^{-tx}]_0^1 = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

ona. $1 - \bar{e}^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \neq 0$

$\Rightarrow 1 - \bar{e}^x \sim 1 \Rightarrow \int_0^x (x) \sim \frac{1}{x}$

$1 + e^x \sim e^x$

$P(x) + e^x \sim e^x$

$1 + \bar{e}^x \sim 1$

$P(x) + \bar{e}^x \sim P(x) \sim O_n(x^n)$

4) $\forall x > 0; \int_{k+1}^x (x) = \frac{k+1}{x} \int_k^x (x) - \frac{e^{-x}}{x}$ Ipp.

5) $\forall x > 0; \int_k^x (x) = \int_0^x t^k e^{-tx} dt \cdot u = tx$

$= \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$

b) $x \mapsto \frac{1}{x^{k+1}}$ est dérivable sur $]0, \infty[$

$u \mapsto u^k e^{-u}$ est continue sur $]0, \infty[$

$\Rightarrow x \mapsto \int_0^x u^k e^{-u} du$ est dérivable sur $]0, \infty[$

$\Rightarrow f_k$ est dérivable sur $]0, \infty[$ et $\forall x > 0$.

$f'_k(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x u^k e^{-u} du + \frac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x}$

$= -\frac{k+1}{x} f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$

$\Rightarrow f'_k(x) = -f_k(x)$

6. Th. Π_4 . f_k est Continu-ena.

$$\Pi_4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = f_k(0)$$

$$\begin{aligned} f_k(x) - f_k(0) &= \int_0^1 t^k e^{-tx} dt - \int_0^1 t^k dt \\ &= \int_0^1 t^k (e^{-tx} - 1) dt. \end{aligned}$$

Diapraisal. $e^{-tx} - 1 \geq -tx$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^k (e^{-tx} - 1) dt \geq -\int_0^1 x t^{k+1} dt.$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{k+1} \leq f_k(x) - f_k(0) \leq 0. \quad (\text{car } f_k \text{ est } \downarrow)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) - f_k(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = f_k(0)$$

$\Rightarrow f_k$ est Continu-ena

Th 1

Si { f est continue sur I .
 f est C^1 sur $I, \{x_0\}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell < \infty$

Alors f est C^1 sur I
et $f'(x_0) = \ell$.

Th 2

Si { f est continue sur I .
 f est C^n sur $I, \{x_0\}$
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = \ell_k < \infty$.
Alors f est C^n sur I
et $\forall k \in \{1, \dots, n\}, f^{(k)}(x_0) = \ell_k$.

App

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pr. f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que...

$$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ind.: $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, \forall x \neq 0$

$\Rightarrow f_k$ est continue

* On a f_k est continue sur $[0, \infty[$

* $f'_k = -f_{k+1}$ est continue sur $]0, \infty[$

$\Rightarrow f_k$ est C^1 sur $]0, \infty[$

* $\lim_{x \rightarrow 0} f'_k(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} f_{k+1}(x)$

Donc f_k est C^1 sur $[0, \infty[$
et $f'_k(0) = -f_{k+1}(0)$

Ex 3.

Sei C^2 auf $\mathbb{R}$, also fadmet.
in $DH_2(x)$.

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + o(1)$$

$\downarrow$
 $f''(x)$