

Rappel

Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires

- L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle.
- Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f(a)f(b) \leq 0 \end{cases}$, alors
il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème de Heine

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes.
D'où il existe, $c, d \in [a, b]$, tels que
 $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(c)$ et $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(d)$.

Théorème

Soit $a < b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l < \infty \end{cases}$, alors f est bornée

Dérivabilité

Prolongement de la dérivée

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]a, b[\end{cases}$,
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l < +\infty$

alors $\begin{cases} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a, b] \\ f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \end{cases}$

Prolongement de classe C^n

Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } C^{n-1} \text{ sur } [a, b] \\ f \text{ est de classe } C^n \text{ sur }]a, b[\\ \lim_{x \rightarrow a^+} f^{(n)}(x) = l < +\infty \end{cases}$,

alors $\begin{cases} f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a, b] \\ f^{(n)}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f^{(n)}(x) = l \end{cases}$

Théorème de Rolle

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Egalité des accroissements finis

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases}$,
alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Inégalité des accroissements finis

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ |f'(x)| \leq k, \forall x \in]a, b[\end{cases}$,
alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a| \iff f$ est k -Lipschitzienne.

Formule de Leibniz

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I , alors fg est n fois dérivable sur I avec

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I , alors pour tous a et b de I

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Formule de Taylor-Lagrange

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I , alors pour tous a et b distincts dans I , il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cas des polynômes

Si P est un polynôme de degré inférieur ou égale à n , alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I et il existe $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $\forall x \in I$, alors $\forall a, b \in I$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Formule de Taylor-Young

Si f est de classe C^n sur un intervalle I contenant a , alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$