

Correction "Série II Révision" Analyse

Exercice 1

1. $u_n \sim \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ (au numérateur, $n^{\frac{5}{2}}$ l'emporte certainement face à n^2 , et au dénominateur, par croissance comparée, $\ln(2n) = o(2n)$).
2. $u_n \sim \frac{n}{e \times e^n}$, qu'on ne peut pas simplifier davantage (si on tient à l'écrire autrement, $u_n \sim \frac{n}{e \times e^n}$).
3. $u_n = \frac{\ln(n^2) + \ln(1 + \frac{1}{n^2})}{n^2 + 1} \sim \frac{2\ln(n)}{n^2}$.
4. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2}\right) \sim -\frac{1}{n^2 + 2} \sim -\frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 2} = 0$.
5. $u_n = \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{n + o(n) + n + o(n)} \sim \frac{2n}{2n} \sim 1$.
6. Celle-ci est un peu plus tordue : d'un côté $u_n \geq n!$ (c'est assez évident), de l'autre $u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \leq n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ en majorant brutalement chaque terme de la dernière somme par la plus gros, à savoir $(n-2)!$. En divisant tout par $n!$, on obtient l'encadrement $1 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. Les deux termes extrêmes ont manifestement pour limite commune 1, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim n!$.
7. $u_n = \frac{e^{\sqrt{n+1}\ln n}}{e^{\sqrt{n}\ln(n+1)}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n+1)}$. Tentons de trouver un équivalent de ce qui se trouve dans l'exponentielle : $\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n) - \sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\ln(n) - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}\ln(n) - \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par croissance comparée, le premier terme tend vers 0, donc le tout a également une limite nulle. Par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, ou si on préfère $u_n \sim 1$.

Exercice 2

f est évidemment de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons par récurrence que f est de classe C^n et que $f^{(n)}$ est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$$

pour $x \neq 0$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

Pour $n = 0$: ok.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$f^{(n)}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

avec $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.

Récurrence établie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n(\sqrt{y})e^{-y} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ et de même quand

$x \rightarrow 0^-$.

Par le théorème du prolongement C^1 dans une version généralisée, on obtient que

f est de classe C^∞ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Exercice 4

1. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on peut utiliser l'ITL entre x et $x+h$, ainsi qu'entre x et $x-h$. Ainsi :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2}|h|^2, \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2}|h|^2.$$

On en déduit, par IT, que

$$|(f(x+h) - f(x) - hf'(x)) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))| \leq M_2 h^2,$$

donc que

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq M_2|h|^2 \quad \text{soit:} \quad |2hf'(x) - (f(x+h) - f(x-h))| \leq M_2|h|^2.$$

2. La deuxième inégalité triangulaire amène alors

$$|2hf'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq M_2|h|^2,$$

donc, encore par IT :

$$2|h||f'(x)| \leq M_2|h|^2 + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq M_2|h|^2 + 2M_0.$$

En divisant par $2|h| > 0$, il vient

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2|h|}{2} + \frac{M_0}{|h|}.$$

En particulier, pour $h > 0$, on obtient bien l'inégalité voulue.

3. Cette inégalité étant vraie pour tout x (et le majorant étant indépendant de x), un choix quelconque de h (par exemple $h = 1$) assure que f' est bornée. De plus, par définition de la borne supérieure, on a alors

$$M_1 \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h},$$

et ceci pour tout $h > 0$. On peut choisir h convenablement pour obtenir l'inégalité souhaitée. On voit en effet assez facilement qu'en posant $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, le majorant est $\sqrt{2M_0M_2}$, comme voulu.

Si on ne voit pas quelle valeur prendre pour h , on peut étudier la fonction $h \mapsto \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$, pour trouver le meilleur des majorants qu'on peut obtenir de la sorte. On trouve que cette fonction atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ au point $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. Ce calcul nous montre au passage que par cette méthode, on ne peut pas espérer obtenir un meilleur majorant, en évaluant en une autre valeur de h .

Exercice 8

1. La fonction $\ln$ est concave, et on a donc :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy).$$

Il suffit ensuite d'utiliser la croissance de la fonction exponentielle pour en déduire le résultat voulu.

2. Il suffit de sommer les n équations :

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q.$$

3. On pose $\alpha_i = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}}$ et $\beta_i = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}}$. D'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1.$$

Il suffit ensuite de remplacer α_i et β_i par leur valeur pour trouver la formule.

4. On décompose $(a_i + b_i)^p$ en $(a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$. Soit q tel que $1/p + 1/q = 1$, c'est à dire que $pq - q = p$. En appliquant Hölder à chacun des membres, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right] \times \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat. Remarquons que le résultat est aussi vrai pour $p = 1$. Dans ce cas, il est juste trivial!

5. L'inégalité précédente se traduit très facilement en disant que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité