

Série I Révision Analyse

Comportement asymptotique

*Exercice 1 .

1. Trouver un équivalent simple des suites suivantes :

- a) $u_n = sh\left(\frac{1}{n}\right) - Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 b) $v_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 c) $w_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

2. Montrer que $(2n)! = o((n!)^2(2n+1)2^{2n})$.

3. Soit a un réel tel que $a < e$, montrer que $n^a = o(a^n n!)$.

4. Montrer que $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. Montrer que $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 1. Trouver un équivalent simple en 0, des fonctions suivantes :

- a) $f(t) = \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)e^{-t}$
 b) $f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t^2 e^{-t}} \quad (s \in \mathbb{R})$
 c) $f(t) = \frac{t^s e^{-t}}{e^t - 1} \quad (s \in \mathbb{R})$

Exercice 3 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet au point $x \in \mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \text{ existe dans } \mathbb{R}. \text{ Dans ce cas, on note}$$

$$D^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

1. Montrer que si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $D^2 f(x)$ existe en tout point $x \in \mathbb{R}$ et vaut $f''(x)$.

2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant en tout point $x \in \mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde nulle.

Soient a, b et ϵ des réels tels que $a < b$ et $\epsilon > 0$. On pose, pour tout $x > 0$

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - \epsilon(x-a)(b-x)$$

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + \epsilon(x-a)(b-x)$$

a) i) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$, calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

ii) Montrer que φ admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde qu'on déterminera.

3. Montrer que φ n'admet pas un maximum strictement positif.

4. Montrer que φ ne peut pas avoir un maximum strictement positif sur $[a, b]$

5. Montrer que la fonction ψ est continue et qu'elle admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde qu'on déterminera.

6. En déduire que f est affine.

Inégalités

Exercice 4 Les questions de cette exercice sont indépendantes

1. $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer par trois méthodes différentes que les inégalités suivantes :

a) $\ln(1+x) \leq x, \forall x > -1$.

b) $e^x \geq 1+x \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

Montrer que $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Montrer que $\forall c \in [a, b], \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{at} \leq e^{ct} + e^{bt}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $x \geq 0$

$$0 \leq x^k e^{-\lambda x} \leq \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}$$

Exercice 5 1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.

a) Montrer que $\forall y \in [\alpha, \beta]$ et $s \in \mathbb{R}$.

$$0 < (\beta - \alpha)e^{sy} \leq (\beta - \alpha)e^{s\alpha} + (y - \alpha)e^{s\beta}$$

b) Dédurre que si $0 \in [\alpha, \beta]$, alors $\beta e^{s\alpha} + \alpha e^{s\beta} > 0$.

c) Montrer, à l'aide d'une étude de fonction que si $0 \in [\alpha, \beta]$, alors

$$\ln(\beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta}) \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} s^2 + \ln(\beta - \alpha)$$

Equation différentielle

Exercice 6 Soit σ un réel strictement positif et f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'(t) - \frac{t}{\sigma^2} y(t) = -f(t), \quad t \geq 0.$$

On pose $g_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$.

1. Soit φ une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \left(c - \int_0^x f(t)g_\sigma(t)dt \right).$$

2. On admet que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)g_\sigma(t)dt = l$ existe dans $\mathbb{R}$.

On pose $\psi(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \int_x^{+\infty} f(t)g_\sigma(t)dt$

avec $\int_x^{+\infty} f(t)g_\sigma(t)dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_x^A f(t)g_\sigma(t)dt$.

Montrer que ψ est une solution de (E).

3. Montrer s'il existe une solution de (E) qui soit bornée sur $[0, +\infty[$, alors elle est unique.

Intégrale et primitive

Exercice 7

Soit $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 4), x > 0$.

1. Déterminer les primitives de f .

2. Déterminer la primitives de f dont la limite est nulle en $+\infty$.

Exercice 8

Pour tout entier naturel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt, x \geq 0.$$

1. Montrer pour tout entier naturel k , la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la limite de la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$
3. Montrer que $f_0(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$
4. Soit $x > 0$. Montrer que $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
5. a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ $f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.

-
- b) En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
 - c) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1} .
 6. a) Montrer que $\forall y \geq 0$, $1 - e^{-y} \leq y$.
 - b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k est continue en 0 puis qu'elle est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.