

Série II Révision Analyse

Exercice 1 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

$$1. u_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$$

$$2. u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}$$

$$3. u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1}$$

$$4. u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$$

$$5. u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$6. u_n = \sum_{k=0}^n k!$$

$$7. u_n = \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

Exercice 2 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

$$1. \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \quad \text{en } 0$$

$$2. \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \quad \text{en } +\infty$$

$$3. \ln(\cos(x)) \quad \text{en } 0$$

$$4. (x+1)^x - x^x \quad \text{en } 0$$

$$5. \sqrt{\ln(x+1)} - \ln(x) \quad \text{en } +\infty$$

$$6. \frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) \quad \text{en } \frac{\pi}{2}$$

$$7. x^{\frac{1}{x}} - x \quad \text{en } +\infty \text{ et en } 0$$

$$8. \frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 1) - \ln(x^3 - 1)} \quad \text{en } +\infty$$

Exercice 3 On considère la fonction suivante :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 4 On considère une application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f'' soient bornées.

On pose alors $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

On se propose de montrer que f' est alors bornée sur $\mathbb{R}$ et d'établir une majoration de $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ l'aide de M_0 et M_2 .

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$:

$$|2hf'(x) - (f(x+h) - f(x-h))| \leq M_2 h^2$$

2. Dédurre que $|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3. Conclure que f' est bornée et que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$

Exercice 5 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$
2. $f(x) = \frac{3x^4 + 2x + 1}{x(x^2 - 1)}$
3. $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$
4. $f(x) = \frac{\arctan(\frac{1}{x})}{1 + x^2}$
5. $f(x) = \sin(x) \operatorname{sh}(x)$
6. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 6 1. À l'aide du $\ln$, montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geq n \ln \frac{n}{e}$.
3. En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{n^2} \sum_{k=1}^n k x_k.$$

Exercice 7 En se servant de $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 8 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En considérant la fonction $\ln$, montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder, pour $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. En majorant les deux sommes

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p-1} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p-1} b_k,$$

en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 9 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

1. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

2. a) Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

- b) Déduire que si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$